Resolução 1º teste AM2E - 2016/2017 - 2º Semestre

1 a) A equação diferencial $x^3 y' \operatorname{sen} y = 1$ é uma equação de variáveis separáveis. Assim temos

$$\frac{dy}{dx} \operatorname{sen} y = \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow \operatorname{sen} y \, dy = x^{-3} dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \operatorname{sen} y \, dy = \int x^{-3} dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\cos y = \frac{x^{-2}}{-2} + C$$

$$\Leftrightarrow \cos y = \frac{1}{2x^2} + c \quad , c \in \mathbb{R}.$$

A condição inicial é $y(1) = \pi/6$ donde vem

$$\cos \pi/6 = \frac{1}{2} + c \text{ ou seja } c = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Logo a solução do problema é

$$y = \arccos\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right).$$

b) A equação $y' + 2xy - e^{-x^2} = 0$ é uma equação diferencial linear de 1ª ordem.

A equação é equivalente a

$$y' + 2xy = e^{-x^2} \text{ donde temos}$$

$$G(x) = \int 2x \, dx = x^2 + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Logo o factor integrante é $\mu(x) = e^{G(x)} = e^{x^2}$.

Temos então

$$e^{x^2} y' + e^{x^2} \cdot 2xy = 1 \Leftrightarrow (e^{x^2} y)' = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2} y = \int 1 \, dx$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2} y = x + C$$

$(\Leftrightarrow)\ y = xe^{-x^2} + ce^{-x^2},\ c \in \mathbb{R}.$

c) Fazendo a mudança de variável $u = x - y \ (\Leftrightarrow)\ y = x - u$ na equação $y' = f(x-y) + 1$ obtemos

$$\frac{d}{dx}(x-u) = f(u) + 1 \ (\Leftrightarrow)\ 1 - \frac{du}{dx} = f(u) + 1 \ (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow)\ \frac{du}{dx} = -f(u) \ (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow)\ \frac{1}{f(u)}\,du = -1\,dx\ ,$$

que é uma equação de variáveis separáveis, nas variáveis u e x.

2.

a) Temos $y' + 2x - 4 = 0 \ (\Leftrightarrow)\ y' = \underbrace{4 - 2x}_{f(x,y)}$.

Construamos uma tabela para aplicar o método de Euler com passo $\Delta x = 0{,}5$.

n	x_n	y_n	$f(x_n,y_n)\Delta x$	$y_{n+1} = f(x_n,y_n)\Delta x + y_n$
0	0	2	2	4
1	0,5	4	1,5	5,5
2	1	5,5	—	—

$f(x_0, y_0) = 4$

$f(x_1, y_1) = 3$

Assim temos $y(1) \approx y_2 = 5{,}5$.

b) Temos que $y(x) = ax^2 + bx + c$ é solução da equação diferencial se e só se,

$$2ax + b + 2x - 4 = 0 \ (\Leftrightarrow)\ (2a+2)x + b - 4 = 0 \ (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} 2a + 2 = 0 \\ b - 4 = 0 \\ c \in \mathbb{R} \end{cases} (\Leftrightarrow) \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verifica-se ainda que para a solução y passar no ponto $(0,2)$ teremos de ter

$$y(0) = 2 \ (\Leftrightarrow)\ 0 + 4.0 + c = 2 \Rightarrow c = 2.$$

Donde a solução é $y(x) = -x^2+4x+2$, sendo $a=-1$, $b=4$ e $c=2$.

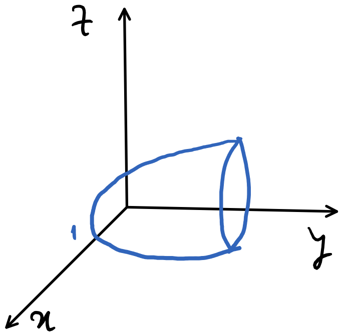
c) Usando a alínea anterior temos $y(1) = 5$ e da alínea b) obtemos $y_2 = 4{,}5$, como valor aproximado de $y(1)$. Assim o erro absoluto da aproximação é

$$|y(1) - y_2| = |5 - 5{,}5| = 0{,}5.$$

3. a) $S_1: \; y = 4x^2 - 8x + 4 + z^2 \Leftrightarrow y = 4(x^2-2x+1) + z^2$

$$\Leftrightarrow y = 4(x-1)^2 + z^2$$

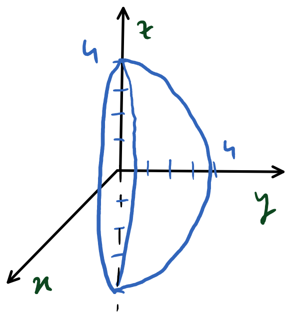
$$\Leftrightarrow y = \frac{(x-1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + z^2$$



é um parabolóide de vértice $(1,0,0)$ paralelo ao eixo YY.

$S_2: \; y = \sqrt{16 - x^2 - z^2} \Leftrightarrow y^2 = 16 - x^2 - z^2 \wedge y \geq 0$

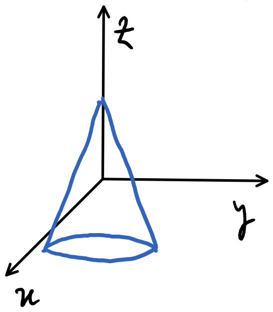
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 16 \text{ e } y \geq 0$$



é metade da superfície esférica $(y \geq 0)$ de centro $(0,0,0)$ e raio 4.

$S_3: \; 1 - z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \Leftrightarrow (1-z)^2 = \frac{x^2+y^2}{3} \wedge 1 - z \geq 0$

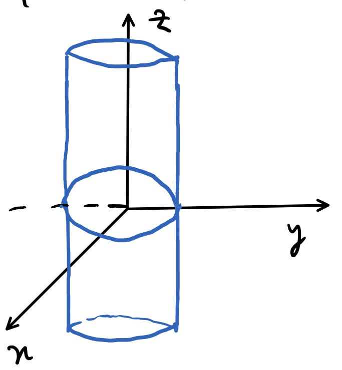
$$\Leftrightarrow (z-1)^2 = \frac{x^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \wedge z \leq 1.$$



superfície cónica simples (metade inferior) paralela ao eixo ZZ de vértice $(0,0,1)$.

$S_4: \; x^2 + y^2 = 3$ superfície cilíndrica de raio $\sqrt{3}$ paralela

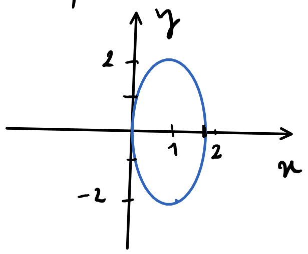
$S_4 : x^2+y^2=3$ superfície cilíndrica de raio $\sqrt{3}$ paralela ao eixo zz.



b) • Secção $y=4$ de S_1,

substituindo y por 4 na equação de S_1 obtemos

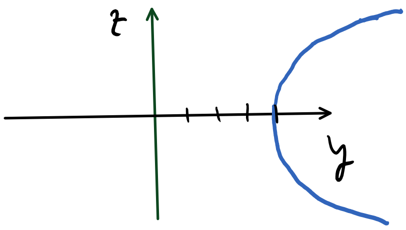
$4 = 4(x-1)^2+z^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+\frac{z^2}{2^2}=1$ elipse com $a=1$ e $b=2$.



• Secção $x=2$ de S_1,

substituindo x por 2 na equação vem

$y=4+z^2 \Leftrightarrow y-4=z^2$ parábola de vértice $(4,0)$



c) é o sólido constituído pelo interior da superfície cónica e limitado inferiormente pelo plano $z=-1$.

Pode-se definir analiticamente por

$\left\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : 1-z \geq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \text{ e } z\geq -1\right\}$,

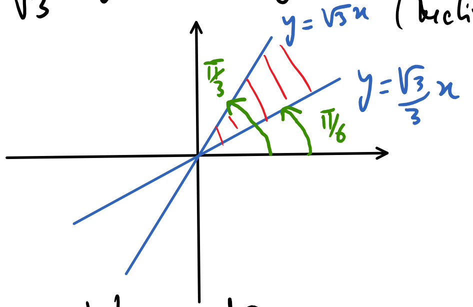
observando que $(0,0,0)$ não satisfaz a inequação $1-z \geq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$.

4. a) Transformando $(x-1)^2+y^2\leq 1$ em coordenadas polares obtemos

$$(r\cos\theta - 1)^2 + (r\operatorname{sen}\theta)^2 \le 1 \Leftrightarrow r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta + 1 + r^2\operatorname{sen}^2\theta \le 1$$

$$\Leftrightarrow r^2 - 2r\cos\theta \le 0 \Leftrightarrow r \le 2\cos\theta$$

Representando $\frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}\,x$ geometricamente temos



(declive é $\sqrt{3}$ logo $\alpha = \pi/3$)

(declive é $\frac{\sqrt{3}}{3}$ logo $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e assim $\alpha = \pi/6$)

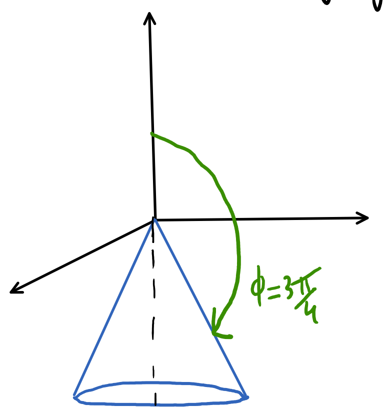
Em coordenadas polares temos

$$E = \{(r,\theta) : r \le 2\cos\theta \text{ e } \pi/6 \le \theta \le \pi/3\}.$$

b) Temos que $x^2+y^2+z^2 \le 1$ em coordenadas esféricas é $\rho \le 1$.

De $x \ge 0$ vem $\theta \in [0,\pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi]$.

A representação geométrica de $z \le -\sqrt{x^2+y^2}$ é



observando que $z \le -\sqrt{x^2+y^2}$ é a parte correspondente ao interior da superfície cónica.

Assim em coordenadas esféricas temos

$$F = \left\{(\rho,\theta,\phi) : \rho \le 1,\ \theta \in \left[0,\tfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \text{ e } \phi \in \left[\tfrac{3\pi}{4}, \pi\right]\right\}$$

5. a) Temos

$$x^2 + (y-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1$$

Fazemos .

$x^2+(y-1)^2=4 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y-1}{2}\right)^2=1$

Fazemos

$$\begin{cases} \frac{x}{2}=\cos t \\ \frac{y-1}{2}=\operatorname{sen} t \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\operatorname{sen} t+1 \\ z=1 \end{cases}$$

com $t\in[0,6\pi[$, dado que por cada período de 2π a partícula faz uma volta completa na circunferência de raio 2.

b) Sendo $r(t)=(2\cos t, 2\operatorname{sen} t+1, 1)$ temos

$$\|v(t)\|=\|r'(t)\|=\|(-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, 0)\|=$$

$$=\sqrt{(-2\operatorname{sen} t)^2+(2\cos t)^2}=\sqrt{4}=2$$

Assim a distância percorrida pela partícula de $t=0$ até $t=6\pi$ é

$$\int_0^{6\pi}\|v(t)\|\,dt=\int_0^{6\pi}2\,dt=12\pi$$

c) Os pontos de intersecção da curva com o plano são as soluções do sistema

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2=4 \\ z=1 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} = \\ = \\ y=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x^2=4 \\ = \\ = \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=2 \\ = \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2}+1 \\ z=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2}+1 \\ z=1 \end{cases}$$

Para $x=\sqrt{2}$ e $y=\sqrt{2}+1$ vem $\cos t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen} t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou seja $t\in\{\pi/4+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}\cap[0,6\pi]$. Para

$x = -\sqrt{2}$ e $y = -\sqrt{2}+1$ sse $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen} t = -\sqrt{2}/2$

ou seja p/ $t \in \{3\pi/4 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cap [0, 6\pi]$.

Assim os instantes pretendidos são os elementos de

$\{\pi/4 + k\pi : k = 0,1,2,3,4,5\}$.