FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Análise Matemática II E

Departamento de Matemática FCT-UNL
2º Teste (9/6/2017) - 2º Semestre - 2016/2017
Duração: 2 horas

1. Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

[1.0] (a) Estude a continuidade de f em $\mathbb{R}^2$;

[1.0] (b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$;

[1.5] (c) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$.

[2.0] 2. Calcule $\int\int_D x\, dA$, em que D é a região limitada pela curva $x = 2 - y^2$ e pela recta $y = -x$.

3. Considere a função $g(x,y) = e^x \text{sen}(\frac{\pi}{2} + x + 2y) + \log(1+y)\cos(x-3y)$.

[1.0] (a) Determine D, o domínio da função g. Faça uma representação geométrica de D.

[1.0] (b) Determine uma equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(0,0,g(0,0))$;

[2.0] (c) Use a alínea anterior para obter um valor aproximado de $g(0.07, 0.04)$.

4. Seja $f(u,v)$ uma função real de dominio $\mathbb{R}^2$, que é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e verifica $\frac{\partial f}{\partial u}(a,-a) - \frac{\partial f}{\partial v}(a,-a) = 0$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Seja ainda ϕ a função definida por $\phi(x,y) = f(x^3+3y, -3x-y^3)$.

[1,5] (a) Mostre que $\frac{\partial \phi}{\partial x}(1,1) - \frac{\partial \phi}{\partial y}(1,1) = 0$;

[1.0] (b) Calcule a derivada direccional de f segundo o vector $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ no ponto $(0,0)$.

[2.5] 5. Determine três números naturais x, y, z com soma igual a 20, tais que xyz^2 tenha valor máximo.

[2.0] 6. Use coordenadas polares para calcular $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dydx$, onde a é uma constante positiva.

7. Considere E_1 o sólido limitado inferiormente pela superfície esférica $x^2+y^2+z^2-3z=0$ e superiormente pelo parabolóide $2-z = x^2+y^2$ e o sólido

$$E_2 = \{x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 9 \text{ e } z \leq \sqrt{x^2+y^2},\ x \leq 0 \text{ e } z \geq 0\}.$$

Calcule:

[2.0] (a) o volume de E_1, através de um integral triplo;

[1.5] (b) o volume de E_2, através de um integral duplo.