2º TESTE DE AM2E (9/6/2017) - Resolução

22 de junho de 2017

1 a) Para $(a,b) \neq (0,0)$ temos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{x^3-y^4}{x^2+y^2} = \frac{a^3-b^4}{\underbrace{a^2+b^2}_{\neq 0}} = f(a,b).$$

Logo f é contínua em (a,b), para $(a,b) \neq (0,0)$.

Para $(a,b) = (0,0)$ temos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^4}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}.$$

Utilizemos o limite por coordenadas polares. Temos fazendo $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$,

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta - r^4\sin^4\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2(r\cos^3\theta - r^2\cos^4\theta)}{r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} (\underbrace{r}_{\to 0}\, \underbrace{\cos^3\theta}_{\text{limitada}} - \underbrace{r^2}_{\to 0}\, \underbrace{\cos^4\theta}_{\text{limitada}}) = 0 = f(0,0).$$

Portanto f é contínua em $(0,0)$ e concluímos que f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

b) Temos $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^3} = 1, \text{ e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0} -\frac{k^4}{k^3} = \lim_{k\to 0} -k = 0.$$

b) Tem-se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-h-0.k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3-k^4}{h^2+k^2} - h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-k^4-hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{0}{0}.$$

Usando coordenadas polares temos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \qquad \sqrt{h^2+k^2} \qquad\qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)} (h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2} \qquad\qquad 0$$

Usando coordenadas polares temos

$$\lim_{r\to 0} \frac{-r^4\cos^4\theta - r\cos\theta\, r^2 \sin^2\theta}{r^3} = \lim_{r\to 0} \underbrace{-r}_{\to 0}\, \underbrace{\cos^4\theta}_{\text{limitada}} - \cos\theta\sin^2\theta$$

$$= -\cos\theta\sin^2\theta \quad \text{depende de } \theta$$

Como o limite anterior não existe concluímos que f não é diferenciável em $(0,0)$.

2. Comecemos por calcular os pontos de intersecção das duas linhas. Temos o sistema

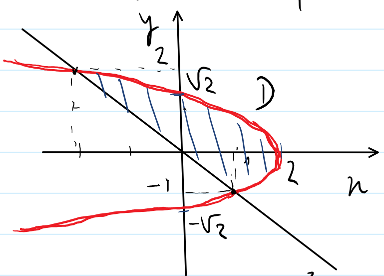
$$\begin{cases} x = 2-y^2 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2-x^2 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \lor x=1 \\ \_\_\_\_ \end{cases}$$

Se $x=-2$ vem $y=2$, obtemos o ponto $(-2,2)$

Se $x=1$ vem $y=-1$, obtemos o ponto $(1,-1)$.

Obtemos a seguinte representação geométrica



A região D é do tipo II

$$-1 \le y \le 2$$

$$-y \le x \le 2-y^2$$

Assim temos $$\iint_D x \, dA = \int_{-1}^{2}\int_{-y}^{2-y^2} x \, dx\, dy = \int_{-1}^{2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-y}^{2-y^2} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} \left((2-y^2)^2 - y^2\right) dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} (4-4y^2+y^4-y^2)\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(4.3 - \left[5\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{2} + \left[\frac{y^5}{5}\right]_{-1}^{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(12 - \frac{5}{3}(8+1) + \frac{1}{5}\cdot 33\right)$$

$$= \frac{9}{5}.$$

3\. a) A equação do plano tangente é dada por

$$z = g(0,0) + \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)(y-0)$$

Ora $g(0,0) = e^0 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \log 1 \cos(0) = 1$

Além disso

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = e^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x+2y\right) + e^x \cos\left(\frac{\pi}{2}+x+2y\right) + \log(1+y)\left(-\operatorname{sen}(x-3y)\right)$$

donde $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = e^0 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + e^0 \cos\frac{\pi}{2} = 1.$

Por outro lado temos

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = e^x \cos\left(\frac{\pi}{2}+x+2y\right).2 + \frac{1}{1+y}\cos(x-3y) + \log(1+y)\, 3 \operatorname{sen}(x-3y).$$

Donde $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 1.$

Assim a equação do plano tangente é $z = 1+x+y$.

b) Temos $g(x,y) \approx L(x,y) = 1+x+y$ e assim

$$g(0.07,\ 0.04) \approx L(0.07, 0.04) = 1+0.07+0.04 = 2,1.$$

4\. Temos a seguinte composição

$$\phi : (x,y) \longrightarrow (\underbrace{x^3+3y}_{u}, \underbrace{-3x-y^3}_{v}) \longrightarrow f(u,v)$$

Calculando as derivadas parciais da função composta ϕ temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v).\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v).\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u}(u,v).3x^2 + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v).(-3).$$

Ora tendo em conta que para $(x,y)=(1,1)$ temos $(u,v)=(4,-4)$ vem

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial u}(4,-4).3 - 3\frac{\partial f}{\partial v}(4,-4)$$
$$= 3\left(\frac{\partial f}{\partial u}(4,-4) - \frac{\partial f}{\partial v}(4,-4)\right) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial u}(4,-4)\cdot 3 - 3\,\frac{\partial f}{\partial v}(4,-4)$$

$$= 3\left(\frac{\partial f}{\partial u}(4,-4) - \frac{\partial f}{\partial v}(4,-4)\right) = 0$$

Dado que $\frac{\partial f}{\partial u}(a,-a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a,-a)$.

Por outro lado temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\cdot 3 + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\cdot(-3y^2).$$

Donde $\frac{\partial \phi}{\partial y}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial u}(4,-4)\cdot 3 + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\cdot(-3)$

$$= 3\left(\frac{\partial f}{\partial u}(4,-4) - \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right) = 0$$

Logo $\frac{\partial \phi}{\partial x}(1,1) - \frac{\partial \phi}{\partial y}(1,1) = 0 - 0 = 0.$

b) Dado que f é diferenciável no ponto $(0,0)$ temos

$$D f_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial v}(0,0)\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) - \frac{\partial f}{\partial v}(0,0)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0 = 0.$$

5. Pretendemos calcular o máximo de $f(x,y,z) = xyz^2$ no conjunto $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ : x+y+z = 20\}$, que é um conjunto limitado e fechado.

Pelo teorema de Weierstrass, dado que f é contínua e o conjunto A é limitado e fechado podemos que f tem máximo e mínimo no referido conjunto.

Usemos o teorema dos multiplicadores de Lagrange.
Consideremos a função

$$h(x,y,z,\lambda) = xyz^2 - \lambda(x+y+z-20).$$

Calculemos os pontos críticos de h. Temos

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz^2 - \lambda = 0 \\ xz^2 - \lambda = 0 \\ 2zxy - \lambda = 0 \\ x+y+z = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = yz^2 \\ \lambda = xz^2 \\ \lambda = 2xyz \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} [illegible] \\ 2zxy - \lambda = 0 \\ x+y+z=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [illegible] \\ \lambda = 2xyz \\ \text{———} \end{cases}$$

$$\underset{x,y,z\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} yz^2 = xz^2 \\ xz^2 = 2xyz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=2y \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ y+y+2y=20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ \text{———} \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=5 \\ z=10 \end{cases}$$

Caso $x=0$ vem $z=20-y$ e $f(x,y,z)=0$
Caso $y=0$ vem $z=20-x$ e $f(x,y,z)=0$
Caso $z=0$ vem $y=20-x$ e $f(x,y,z)=0$

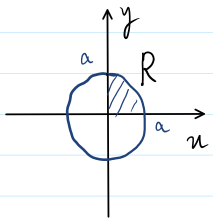
Por outro lado $f(5,5,10) = 5.5.10^2 = 25\times 100 = 2500$ que é o máximo.

Logo o ponto pedido é $(5,5,10)$.

6. Temos $0 \leq x \leq a$ e $0 \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2}$

Ora $y = \sqrt{a^2-x^2} \Leftrightarrow x^2+y^2=a^2$ e $y \geq 0$

A região de integração R é



Assim temos $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx = \iint_R \sqrt{x^2+y^2}\, dA =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r.r\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a d\theta$$

$$= \frac{\pi}{6} a^3 .$$

7. a) Calculemos os pontos de intersecção das duas superfícies. Temos o sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3z=0 \\ 2-z = x^2+y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2-4z+2=0 \quad (2-z \geq 0) \\ \text{———} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2-\sqrt{2} \lor z = 2+\sqrt{2} \quad (z \leq 2) \end{cases}$$

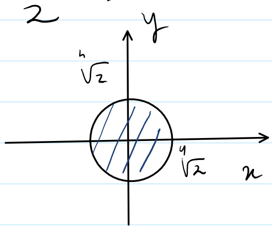
$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} z = 2-\sqrt{2} \vee z = 2+\sqrt{2} \quad (z \leq 2) \\ \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} z = 2-\sqrt{2} \\ x^2+y^2 = \sqrt{2} \end{cases}$$

Temos ainda $x^2+y^2+z^2-3z=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{9-4(x^2+y^2)}}{2}$$

Assim sendo a "sombra" R do sólido E_1 no plano OXY é o círculo de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt[4]{2}$.



Temos $x^2+y^2+z^2-3z=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{9-4(x^2+y^2)}}{2}$$

(Escolhemos o $(-)$ pois é a parte inferior da superfície esférica).

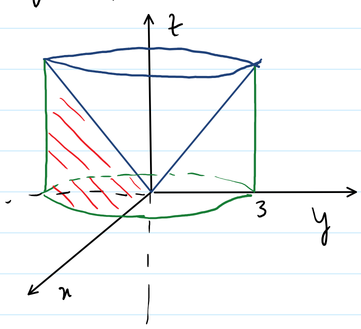
O volume de E_1 é dado por

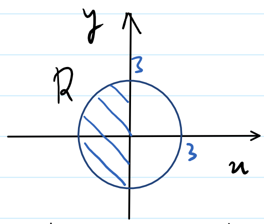
$$V = \iiint_{E_1} 1 \, dV = \iint_R \int_{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{9-4(x^2+y^2)}}{2}}^{2-x^2-y^2} 1 \, dz \, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt[4]{2}} \int_{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{9-4r^2}}{2}}^{2-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{4} - \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\sqrt{9-4\sqrt{2}} \right) \pi .$$

b) O sólido E_2 é limitado superiormente pela superfície cónica $z = \sqrt{x^2+y^2}$, inferiormente pelo plano $z=0$ e lateralmente pela superfície cilíndrica $x^2+y^2=9$ e pelo plano $y=0$, como mostra a seguinte figura





("sombra" do sólido E_2 no plano XOY).

Assim o volume do sólido E_2 é dado por

Assim o volume do sólido E_2 é dado por

$$V = \iint_R \left(\sqrt{x^2+y^2} - 0 \right) dA = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^3 r \cdot r \, dr \, d\theta =$$

$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^3 d\theta = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} 9 \, d\theta = 9\pi .$$