FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática II E

Exame de Recurso — 9 de Janeiro de 2018
(Duração 3h)

1. **[1.4 val.]** Considere $x > 0$. Determine a família de soluções da equação diferencial ordinária de primeira ordem:

$$xy' + 2y = x^2 \sin(x^2)$$

2. **[1.3 val.]** O método de Euler foi usado para determinar uma aproximação numérica da solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt[3]{x+y}}{2x-y} \end{cases}$$

Sabe-se que $x_3 = 1, y_4 = 2$ e $y_5 = \frac{11}{4}$. Determine o comprimento de passo utilizado.

3. Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \frac{1}{x+y}\sin(x+y) + \log\left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}\right)\cos\left(\frac{1}{xy}\right)$$

(a) **[0.8 val.]** Determine o conjunto D, domínio de f, esboçando uma sua representação gráfica.

(b) **[0.7 val.]** Indique $int(D)$ e $fr(D)$. O conjunto D é aberto? E fechado? Justifique.

(c) **[1.3 val.]** É possível prolongar f por continuidade ao ponto $(0,0)$? Caso seja possível, defina a respectiva função prolongamento.

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

4. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} x\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) **[0.7 val.]** Calcule os limites direccionais de g no ponto $(0,0)$.

   (b) **[1.3 val.]** Mostre que g não é diferenciável na origem.

   (c) **[0.5 val.]** Determine $g'_{\vec{u}}(0,0)$, com $\vec{u} = (2,-1)$.

5. **[1.0 val.]** Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ cuja matriz jacobiana é dada por

$$Jac_h(x,y) = \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ 2y^2 & 4xy \end{bmatrix}.$$

   Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(u,v) = (u+v)^2$. Sabendo que $h(1,1) = (e,1)$, determine a matriz jacobiana de $f = g \circ h$ no ponto $(1,1)$.

6. **[1.0 val.]** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função que admite derivada segundo qualquer vector no ponto (x_0,y_0) e tal que $f'_{(-1,0)}(x_0,y_0) = f'_{(0,-1)}(x_0,y_0) = 0$. Mostre que $\nabla f(x_0,y_0) = 0$.

   Sugestão: Comece por provar que $f'_{-\vec{u}}(x_0,y_0) = -f'_{\vec{u}}(x_0,y_0)$.

7. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x,y) = 4xy$$

   e o conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$.

   (a) **[0.5 val.]** Justifique que g tem um máximo e um mínimo absolutos em A.

   (b) **[2.0 val.]** Determine os pontos onde são atingidos o máximo e o mínimo absolutos de g em A.

8. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por $f(x,y) = (\cos(\pi x) + y, \sin(\pi x) - y)$.

   (a) **[1.0 val.]** Mostre que f é invertível numa vizinhança de $(1,0)$. Justifique detalhadamente a sua resposta.

   (b) **[1.0 val.]** Determine a matriz jacobiana de f^{-1} no ponto $(-1,0)$.

$\overrightarrow{prox.folha}$

9. **[1.5 val.]** Calcule o valor do seguinte integral:

$$\int_0^3 \int_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{4-y}} \frac{1}{1+x^2} dxdy$$

Sugestão: Comece por trocar a ordem de integração.

10. **[1.5 val.]** Utilizando coordenadas polares, calcule a área do seguinte domínio:

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4 \wedge y \leq \sqrt{3}x \wedge x \leq 3 \wedge y \geq 0\}$$

11. **[1.5 val.]** Usando coordenadas esféricas, calcule o volume do sólido compreendido entre as semi-esferas $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ e $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ e exterior ao cone $z^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3}$, com $z \geq 0$.

12. **[1.0 val.]** Considere a curva de equação $y = h(z)$ com $a \leq z \leq b$. Utilizando um integral simples, exprima o valor da massa do sólido homogéneo obtido por revolução de 2π radianos em torno do eixo Oz da curva mencionada.