Exame de Recurso de
Análise Matemática II E
09-01-2018

Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução de entre muitas outras possibilidades.

1

$$xy' + 2y = x^2 \operatorname{sen}(x^2) \underset{x>0}{\Leftrightarrow} y' + \frac{2}{x}y = x\operatorname{sen}(x^2)$$ que é

uma equação diferencial linear de primeira ordem

Determinemos um factor integrante para a equação:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} \underset{x>0}{=} e^{2\log x} = e^{\log(x^2)} = x^2$$

Assim

$$y' + \frac{2}{x}y = x\operatorname{sen}(x^2) \Leftrightarrow x^2y' + 2xy = x^3\operatorname{sen}(x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(x^2y) = x^3\operatorname{sen}(x^2) \Leftrightarrow x^2y = \int x^3\operatorname{sen}(x^2)\,dx$$

$$\underset{*}{\Leftrightarrow} x^2y = -\frac{x^2}{2}\cos(x^2) + \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2} + c \underset{x>0}{\Leftrightarrow} y = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2x^2} + \frac{c}{x^2}$$

com $c \in \mathbb{R}$

$$* \int x^3\operatorname{sen}(x^2)\,dx = -\frac{x^2}{2}\cos(x^2) + \int x\cos(x^2)\,dx = -\frac{x^2}{2}\cos(x^2) + \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2} + c$$, com $c \in \mathbb{R}$

$f(x) = x\operatorname{sen}(x^2)$ $\quad F(x) = -\frac{\cos(x^2)}{2}$

$g(x) = x^2$ $\quad g'(x) = 2x$

2

De acordo com o método de Euler sabemos que

$$y_{n+1} = y_n + \Delta f(x_n, y_n) \text{ e}$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta,$$

onde Δ representa o comprimento de passo considerado.

Assim,

$$y_5 = y_4 + \Delta f(x_4, y_4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_5 = y_4 + \Delta f(x_3 + \Delta, y_4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{4} = 2 + \Delta f(1 + \Delta, 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{4} = 2 + \cancel{\Delta} \frac{\sqrt[3]{3+\Delta}}{\cancel{2} + 2\cancel{\Delta} - \cancel{2}} \Leftrightarrow$$

$$\underset{\Delta \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{11}{4} = \frac{4 + \sqrt[3]{3+\Delta}}{2} \Leftrightarrow 4 + \sqrt[3]{3+\Delta} = \frac{11}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{3+\Delta} = \frac{11}{2} - 4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3+\Delta} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 + \Delta = \frac{27}{8} \Leftrightarrow \Delta = \frac{27}{8} - 3 = \frac{3}{8}$$

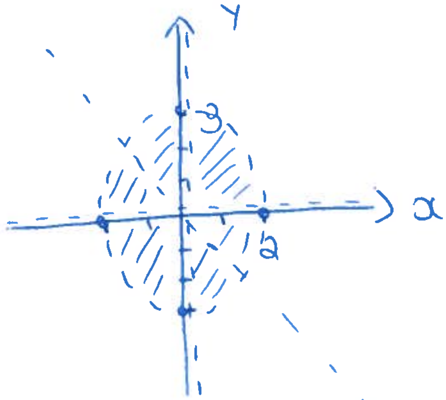
③

a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \neq 0 \wedge 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} > 0 \wedge xy \neq 0\}$

$x+y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq -x$

$1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1$

$xy \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge y \neq 0$



B) $\mathrm{int}(D) = D$

$\mathrm{fr}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+y=0 \vee xy=0) \wedge \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\} \cup$

$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}$

D é aberto pois $D = \mathrm{int}(D)$. D não é fechado pois, por exemplo, $(0,0) \in \mathrm{fr}(D)$ mas $(0,0) \notin D$.

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{sen}(x+y)}{x+y} + \log\left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}\right) \cos\left(\frac{1}{xy}\right)$

$= 1$ pois

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{sen}(x+y)}{x+y} = 1$ dado que $\lim_{\omega \to 0} \frac{\mathrm{sen}\,\omega}{\omega} = 1$

- $\cos\left(\frac{1}{xy}\right)$ é uma função limitada entre -1 e 1,

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \log\left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}\right) = \log 1 = 0$ logo

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \log\left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{a}\right) \cos\left(\frac{1}{xy}\right) = 0$

(4)

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe, é possível prolongar f por continuidade ao ponto $(0,0)$. A função prolongamento é definida por

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x+y} \operatorname{sen}(x+y) + \log\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\right)\cos\left(\frac{1}{x-y}\right), & \text{se } (x,y)\in D \\ 1 & \text{, se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(4)

a)
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} g(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} x\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} x\,\frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} x\,\frac{\cancel{x^2}(1-m^2)}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} g(x,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

b) g é diferenciável em $(0,0)$ $\Leftrightarrow$

$$g(h_1,h_2) = g(0,0) + \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)\,h_1 + \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\,h_2 + \|(h_1,h_2)\|\,\varepsilon(h_1,h_2),$$

com $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$

Mostremos então que $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} E(h_1,h_2)$ ou não existe ou é diferente de zero.

$$\frac{dg}{dx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\,\frac{h^2}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

$$\frac{dg}{dy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0,h)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0\,\frac{-h^2}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} E(h_1,h_2) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1\,\frac{h_1^2-h_2^2}{h_1^2+h_2^2} - h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\cancel{h_1^3} - h_1h_2^2 - \cancel{h_1^3} - h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{-2h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = *$$

Considerando uma mudança de variáveis para coordenadas polares $\begin{cases} h_1 = \rho\cos\theta & \rho>0 \\ h_2 = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta & \theta\in[0,2\pi[\end{cases}$ vem

$$* = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \rho>0\\ \theta\in[0,2\pi[}} \frac{-2\cancel{\rho^3}\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta}{\cancel{\rho^3}} = -2\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta$$

Como o valor do cálculo depende de θ, concluímos que $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2)$ não existe. Logo g não é diferenciável em $(0,0)$.

e) Uma vez que g não é diferenciável em $(0,0)$, $g'_{\vec{u}}(0,0)$ terá de ser calculada por definição.

$$g'_{\vec{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g((0,0)+t(2,-1)) - g(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{g(2t,-t) - g(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2t\,\dfrac{4t^2-t^2}{4t^2+t^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{6\cancel{t^3}}{5\cancel{t^3}} = \frac{6}{5}$$

5

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$f = g \circ h$

Pelo teorema da derivada da função composta sabemos que

$$\text{Jac} f(x,y) = \text{Jac}\, g(h(x,y)) \times \text{Jac}\, h(x,y)$$

Assim $\text{Jac} f(1,1) = \text{Jac}\, g(h(1,1)) \times \text{Jac}\, h(1,1) =$

$$= \text{Jac}\, g(e,1) \times \text{Jac}\, h(1,1) =$$

$$\overset{*}{=} \begin{bmatrix} 2(e+1) & 2(e+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e(e+1)+4(e+1) & 8(e+1) \end{bmatrix}$$

*

$$\operatorname{Jac} g(u,v) = \left[\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \right] =$$

$$= \left[2(u+v) \quad 2(u+v) \right]$$

$$\operatorname{Jac} g(1,1) = \left[2(1+1) \quad 2(1+1) \right]$$

6 Comecemos por provar a sugestão. Seja $\vec{u} = (u_1, u_2)$

$$f'_{-\vec{u}}(x_0,y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((x_0,y_0) + t(-u_1,-u_2)) - f(x_0,y_0)}{t} =$$

$$= -\lim_{t \to 0} \frac{f((x_0,y_0) - t(u_1,u_2)) - f(x_0,y_0)}{-t}$$

$$= -f'_{\vec{u}}(x_0,y_0)$$

Assim

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f'_{(1,0)}(x_0,y_0) = -f'_{(-1,0)}(x_0,y_0) = -0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = f'_{(0,1)}(x_0,y_0) = -f'_{(0,-1)}(x_0,y_0) = -0 = 0$$

Logo

$$\nabla f(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

7

a) g é uma função polinomial, logo contínua em $\mathbb{R}^2$.
Em particular, g é contínua em A.

A é um conjunto compacto, ou seja, A é um conjunto fechado ($A = \bar{A}$) e limitado ($A \subset B_2(0,0)$).

Pelo teorema de Weierstrass, g tem máximo e mínimo absolutos em A.

b) $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 4xy - \lambda(x^2+y^2-1)$

$$\nabla \mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4y - 2\lambda x = 0 \\ 4x - 2\lambda y = 0 \\ -(x^2+y^2-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\lambda x}{2} \\ 4x - \lambda^2 x = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ x(4-\lambda^2) = 0 \\ \overline{} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ x = 0 \lor \lambda = \pm 2 \\ \overline{} \end{cases}$$

Se $x = 0$ vem:

$$\begin{cases} y = 0 \\ \overline{} \\ 0 = 1 \text{ impossível} \end{cases}$$

Se $\lambda = 2$ vem:

$$\begin{cases} y = x \\ \overline{} \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ \overline{} \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ \overline{} \\ x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$ logo obtemos os

pontos $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Se $\lambda = -2$ vem:

$$\begin{cases} y = -x \\ - \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} = \\ - \\ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

logo obtemos os pontos

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ e } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Pela alínea anterior g tem máximo e mínimo absolutos em A. Como:

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = +2$$

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2$$

podemos concluir que $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ são pontos de máximo absoluto de g em A e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ são pontos de mínimo absoluto de g em A.

8

a) $f(x,y) = (\cos(\pi x) + y, \operatorname{sen}(\pi x) - y) =$

$= (f_1(x,y), f_2(x,y))$

$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = -\operatorname{sen}(\pi x)\pi$

$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \cos(\pi x)\pi$

$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 1$

$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = -1$

Como as derivadas parciais de f são contínuas em $\mathbb{R}^2$, podemos afirmar que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Em particular, f é de classe $\mathcal{C}^1$ em qualquer vizinhança de $(1,0)$.

$$|\operatorname{Jac} f(1,0)| = \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,0) \end{bmatrix} \right| =$$

$$= \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\pi & -1 \end{bmatrix} \right| = \pi \neq 0$$

Pelo teorema da função inversa f é invertível na vizinhança considerada de $(1,0)$, designada por U, sendo $f^{-1}: V \to U$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ em V.

B)

$$\operatorname{Jac} f^{-1}(-1,0) = [\operatorname{Jac} f(1,0)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\pi & -1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

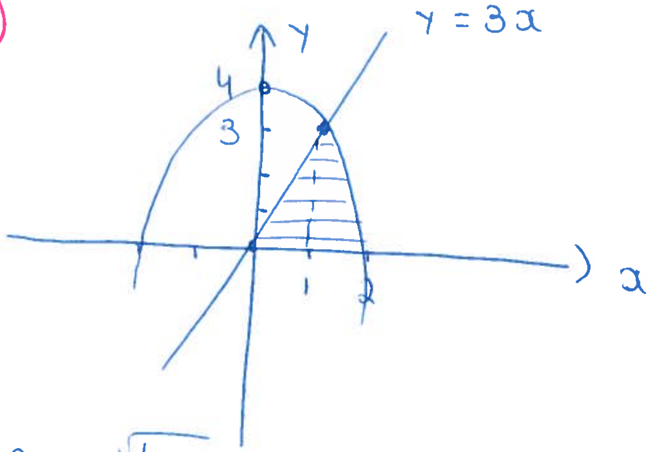
$f(1,0) = (-1,0)$

$$= \frac{1}{\left|\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\pi & -1 \end{bmatrix}\right|} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \pi & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \pi & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\pi} & -\frac{1}{\pi} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

9



$x = \frac{y}{3} \Leftrightarrow y = 3x$

$x = \sqrt{4-y} \Leftrightarrow x^2 = 4-y$
$\Leftrightarrow y = 4 - x^2$

$$\int_0^3 \int_{y/3}^{\sqrt{4-y}} \frac{1}{1+x^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{3x} \frac{1}{1+x^2}\, dy\, dx + \int_1^2 \int_0^{4-x^2} \frac{1}{1+x^2}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{3x}{1+x^2}\, dx + \int_1^2 \frac{4-x^2}{1+x^2}\, dx =$$

$$\begin{array}{r|l} 4 - x^2 & 1+x^2 \\ \cline{2-2} +1 + x^2 & -1 \\ \hline 5 & \end{array}$$

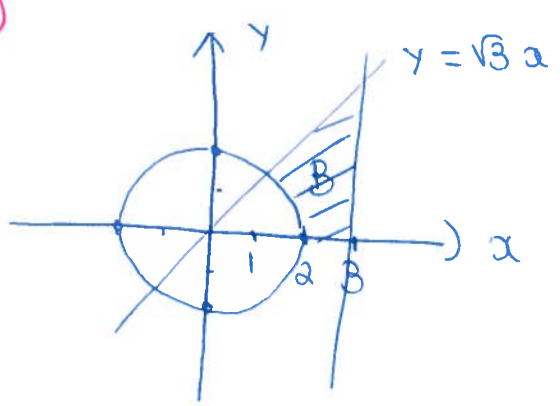
$$= \left[\frac{3}{2} \log(1+x^2) \right]_0^1 + \int_1^2 -1 + \frac{5}{1+x^2}\, dx =$$

$$= \frac{3}{2} \log 2 + \left[-x + 5 \operatorname{arctg} x \right]_1^2 =$$

$$= \frac{3}{2} \log 2 - 2 + 5 \operatorname{arctg} 2 + 1 - 5 \frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{3}{2} \log 2 - 1 + 5 \operatorname{arctg} 2 - 5 \frac{\pi}{4}$$

10



$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi/3 \\ 2 \leq \rho \leq \dfrac{3}{\cos\theta} \end{array}$$

$$y = \sqrt{3}\,x \iff \rho \operatorname{sen}\theta = \sqrt{3}\,\rho\cos\theta \underset{\rho>0}{\iff} \operatorname{tg}\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

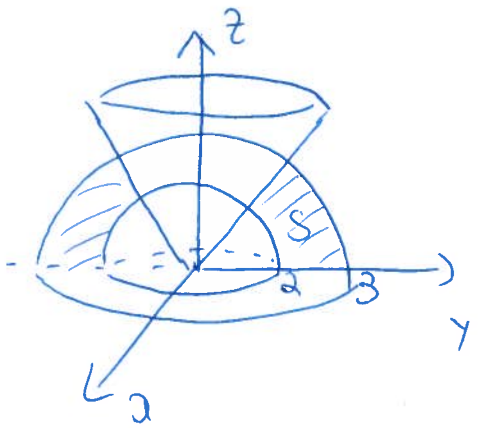
$$x = 3 \iff \rho\cos\theta = 3 \iff \rho = \frac{3}{\cos\theta}$$

$$\text{Area} = \iint_B 1\,dx\,dy = \int_0^{\pi/3} \int_2^{\frac{3}{\cos\theta}} \rho \; d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/3} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_2^{\frac{3}{\cos\theta}} d\theta = \int_0^{\pi/3} \frac{9}{2}\,\frac{1}{\cos^2\theta} - 2 \; d\theta =$$

$$= \left[\frac{9}{2}\operatorname{tg}\theta - 2\theta \right]_0^{\pi/3} = \frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$$

11



$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 2 \leq \rho \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \pi/3 \leq \varphi \leq \pi/2 \end{array}$$

$$z^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} \iff \rho^2\cos^2\varphi = \frac{\rho^2}{3}\operatorname{sen}^2\varphi \underset{\rho>0}{\iff} \operatorname{tg}^2\varphi = 3 \underset{\operatorname{tg}\varphi>0}{\iff} \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Volume} = \iiint_S 1 \, dx\,dy\,dz =$$

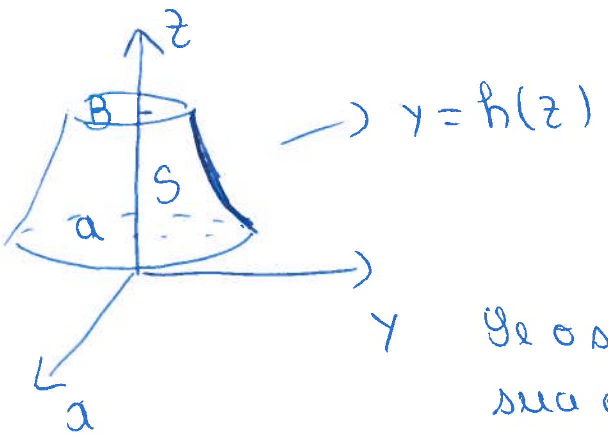
$$= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_2^3 \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left[\frac{\rho^3}{3} \operatorname{sen}\varphi \right]_2^3 d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(9 - \frac{8}{3}\right) \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi =$$

$$= 2\pi \, \frac{19}{3} \left[-\cos\varphi \right]_{\pi/3}^{\pi/2} = \cancel{2}\pi \, \frac{19}{3} \, \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{19}{3}\pi$$

12



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a \le z \le B \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le h(z) \end{array}$$

Se o sólido é homogêneo então a sua densidade é constante (k).

$$\text{Massa} = \iiint_S k \, dx\,dy\,dz = k \iiint_S 1 \, dx\,dy\,dz =$$

$$= k \int_0^{2\pi} \int_a^B \int_0^{h(z)} r \, dr \, dz \, d\theta =$$

$$= 2k\pi \int_a^B \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{h(z)} dz = 2k\pi \int_a^B \frac{h^2(z)}{2} \, dz =$$

$$= k\pi \int_a^B h^2(z) \, dz$$