FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática II E

1º Teste — 4 de Novembro de 2017
(Duração 1:30)

1. **[2.5 val.]** Determine a família de soluções da equação diferencial ordinária de primeira ordem:
$$\frac{dy}{dx} = \log(x^2)\sqrt[3]{x^3y^2}$$

2. O processo culinário de temperar chocolate negro implica o seu aquecimento até aos $45°C$, seguido do arrefecimento até aos $30°C$. Numa cozinha, com temperatura ambiente de $25°C$, chocolate negro foi aquecido até aos $45°C$, tendo baixado a sua temperatura $1°C$ no primeiro minuto após o aquecimento.

   (a) **[1.0 val.]** Modele matematicamente a situação descrita, definindo o problema de valor inicial que lhe corresponde.

   (b) **[1.0 val.]** Determine a solução do problema de valor inicial definido na alínea anterior.

   (c) **[1.0 val.]** Quantos minutos serão necessários para que o chocolate atinja os $30°C$?

3. Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:
$$f(x,y) = 3 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\log\left(y^2 - x + \frac{1}{2}\right)\sqrt[4]{-xy}$$

   (a) **[1.5 val.]** Determine o conjunto D, domínio de f, esboçando uma sua representação gráfica.

   (b) **[1.5 val.]** Indique $int(D)$ e $fr(D)$. O conjunto D é aberto? E fechado? Justifique.

   (c) **[2.5 val.]** É possível prolongar f por continuidade ao ponto $(0,0)$? Caso seja possível, defina a respectiva função prolongamento.

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

4. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & , \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & , \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) **[1.5 val.]** Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.

(b) **[2.5 val.]** Verifique se g é diferenciável em $(0,0)$.

(c) **[1.0 val.]** Considere $\vec{u} = (-1,2)$. Determine $g'_{\vec{u}}(0,0)$.

5. **[2.0 val.]** Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função definida por

$$g(x,y) = (\operatorname{arctg}(x^2-y), e^{xy})$$

e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, com gradiente no ponto $(0,1)$ dado por $\nabla f(0,1) = [-2\ 5]^\top$. Calcule $\nabla(f \circ g)(0,0)$.

6. **[2.0 val.]** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz $f(0,0) = 0$, $f'_{\vec{u}}(0,0) = \sin(u_1u_2) + e^{u_2}$ para todo o vector $\vec{u} = (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2$ e $|f(x,y)| \leq \|(x,y)\|^2 - 4(|x|+|y|), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.