Proposta de Resolução do Primeiro Teste de Análise Matemática II E (4/11/2017)

Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução de entre muitas outras possibilidades.

1) $\frac{dy}{dx} = \log(x^2)\sqrt[3]{x^3y^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \log(x^2)\, x\sqrt[3]{y^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (supondo $y \neq 0$) $\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}\frac{dy}{dx} = x\log(x^2) \Leftrightarrow$

$f(x) = x \quad F(x) = \frac{x^2}{2}$

$g(x) = \log(x^2) \quad g'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$

$\Leftrightarrow \int \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}\frac{dy}{dx}\,dx = \int x\log(x^2)\,dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int y^{-2/3}\,dy = \frac{x^2}{2}\log(x^2) - \int x\,dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{y^{1/3}}{1/3} + c_1 = \frac{x^2}{2}\log(x^2) - \frac{x^2}{2} + c_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3y^{1/3} = \frac{x^2}{2}\log(x^2) - \frac{x^2}{2} + c_3,\ c_3 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \left(\frac{x^2}{6}\log(x^2) - \frac{x^2}{6} + c_4\right)^3,\ c_4 \in \mathbb{R}$

Além da solução acima calculada, $y = 0$ também é solução pois

$$\frac{dy}{dx} = 0 = \log(x^2)\sqrt[3]{x^3 \times 0}$$

a) Trata-se do modelo de variação da temperatura de Newton aplicado à situação descrita. Assim:

$$\frac{dy}{dt} = k(y-25)$$ onde $y(t)$ representa a

temperatura do chocolate negro no minuto t e k é uma constante a determinar.

O problema de valor inicial correspondente à situação descrita será então:

$$\begin{cases} y(0) = 45 \\ \frac{dy}{dt} = k(y-25) \end{cases}$$

A informação adicional $y(1) = 44$ permitirá determinar o valor da constante k.

b) $$\frac{dy}{dt} = k(y-25) \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} - ky = -25k$$

$$\mu(t) = e^{\int -k\,dt} = e^{-kt}$$

Então

$$e^{-kt}\frac{dy}{dt} - e^{-kt}ky = -25k\,e^{-kt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-kt}y\right) = -25k\,e^{-kt}$$

$$\Leftrightarrow e^{-kt}y = \int -25k\,e^{-kt}\,dt$$

$$\Leftrightarrow e^{-kt}y = 25\,e^{-kt} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow y = 25 + c\, e^{kt}, \; c \in \mathbb{R}$

$y(0) = 45 \Leftrightarrow 45 = 25 + c \Leftrightarrow c = 20$

$y(1) = 44 \Leftrightarrow 44 = 25 + 20\, e^{k} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{19}{20} = e^{k} \Leftrightarrow k = \log\left(\frac{19}{20}\right)$

A solução do problema de valor inicial é então

$$y = 25 + 20\, e^{\log\left(\frac{19}{20}\right) t}$$

e) $y(t) = 30 \Leftrightarrow 25 + 20\, e^{\log\left(\frac{19}{20}\right) t} = 30 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{\log\left(\frac{19}{20}\right) t} = \frac{5}{20} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log\left(\frac{19}{20}\right) t = \log\left(\frac{1}{4}\right)$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{\log\left(\frac{1}{4}\right)}{\log\left(\frac{19}{20}\right)}$

São necessários $\dfrac{\log(1/4)}{\log\left(\frac{19}{20}\right)}$ minutos para que o chocolate atinja os 30°C.

3

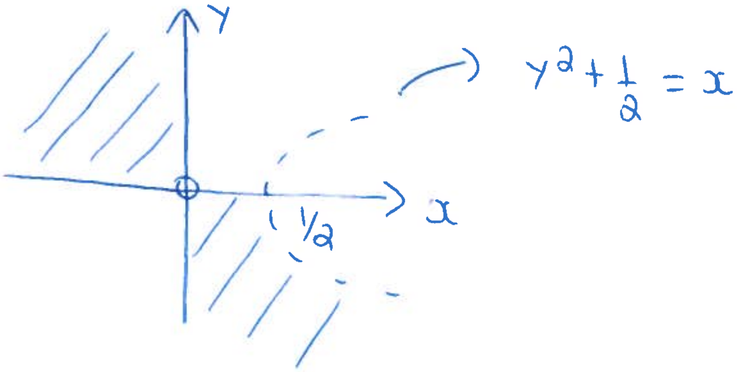
a)

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 0 \wedge y^2 - x + \tfrac{1}{2} > 0 \wedge -xy \geq 0\}$$

$x^2+y^2 > 0 \wedge y^2 - x + \frac{1}{2} > 0 \wedge -xy \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x,y) \neq (0,0) \wedge y^2 + \frac{1}{2} > x \wedge xy \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x,y) \neq (0,0) \wedge y^2 + \frac{1}{2} > x \wedge ((x \leq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \geq 0 \wedge y \leq 0))$



b) $\text{int}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 0 \wedge y^2 - x + \frac{1}{2} > 0\}$

$\text{fr}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \vee (y = 0 \wedge x \leq \frac{1}{2}) \vee$

$\vee (y^2 + \frac{1}{2} = x \wedge y < 0)\}$

D é aberto se e só se $D = \text{int}(D)$. Como $(-1,0) \in D$ mas $(-1,0) \notin \text{int}(D)$, D não é aberto.

D é fechado se e só se $D = \bar{D} = \text{int}(D) \cup \text{fr}(D)$. Como $(0,0) \in \bar{D}$ mas $(0,0) \notin D$, D não é fechado.

e) Será possível prolongar f por continuidade ao ponto $(0,0)$ se existir $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 3 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\log\left(y^2-x+\frac{1}{2}\right)\sqrt[4]{-x}$$

Como $\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ é uma função limitada entre -1 e 1 e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt[4]{-xy} = 0$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\sqrt[4]{-xy} = 0.$$

Atendendo a que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \log\left(y^2-x+\frac{1}{2}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right)$ vem

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 3 - 0 \times \log(1/2) = 3.$$

Logo, é possível prolongar f por continuidade ao ponto $(0,0)$, sendo o respectivo prolongamento definido como:

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} 3 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\log\left(y^2-x+\frac{1}{2}\right)\sqrt[4]{-xy}, & \text{se } (x,y)\in D \\ 3, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4

a)

$$\frac{dg}{dx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\times 0 \operatorname{sen}(h^2+0^2)}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\frac{dg}{dy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0,h)-g(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0\times h \operatorname{sen}(0^2+h^2)}{0^2+h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

b) g é diferenciável em (0,0) se e só se

$$g(h_1,h_2) = g(0,0) + dg(0,0)(h_1,h_2) + \|(h_1,h_2)\|\, \varepsilon(h_1,h_2),$$

$$\text{com } \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$$

Caso g seja diferenciável em (0,0) sabemos também

que $dg(0,0)(h_1,h_2) = \frac{dg}{dx}(0,0)\,h_1 + \frac{dg}{dy}(0,0)\,h_2 =$

$$= 0 \times h_1 + 0 \times h_2 = 0$$

Assim

$$g(h_1,h_2) = 0 + 0 + \sqrt{h_1^2+h_2^2}\;\varepsilon(h_1,h_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(h_1,h_2) = \frac{g(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{h_1h_2\,\text{sen}(h_1^2+h_2^2)}{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2\,\text{sen}(h_1^2+h_2^2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}\,(h_1^2+h_2^2)}$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}} \frac{\rho^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}(\rho^2)}{\rho\;\rho^2} = \quad \begin{cases} h_1 = \rho\cos\theta \\ h_2 = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \quad \rho > 0,\ \theta\in[0,2\pi[$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\in[0,2\pi[}} \rho\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\,\frac{\text{sen}(\rho^2)}{\rho^2} \underset{*}{=} 0 \times 1 = 0$$ logo g é diferenciável em (0,0).

* $\lim_{\rho\to 0} \frac{\text{sen}(\rho^2)}{\rho^2} = 1$ pois $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$ e como $\lim_{\rho\to 0}\rho = 0$

e $\cos\theta\,\text{sen}\,\theta$ é limitada entre -1 e 1 temos que $\lim_{\rho\to 0}\rho\cos\theta\,\text{sen}\,\theta = 0$

e)

Sendo g diferenciável em (0,0), sabemos que

$$g'_{\vec{u}}(0,0) = dg(0,0)(-1,2) = 0 \times (-1) + 0 \times 2 = 0$$

5

$$\nabla(f \circ g)(0,0)^T = \nabla f(g(0,0))^T \times \text{Jac}\, g(0,0) =$$

$$= \nabla f(0,1)^T \times \text{Jac}\, g(0,0)$$

$$\text{Jac}\, g(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+(x^2-y)^2} \cdot 2x & \frac{-1}{1+(x^2-y)^2} \\ e^{xy}\, y & e^{xy}\, x \end{bmatrix}$$

$$\text{Jac}\, g(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla(f \circ g)(0,0)^T = \begin{bmatrix} -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Assim

$$\nabla(f \circ g)(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(6)

f é diferenciável em $(0,0)$ se e só se

$$f(h_1,h_2) = f(0,0) + df(0,0)(h_1,h_2) + \|(h_1,h_2)\|\,\varepsilon(h_1,h_2),$$

$$\text{com } \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$$

Sabemos ainda que se f é diferenciável em $(0,0)$ então

$$df(0,0)(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,h_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = f'_{(1,0)}(0,0) = \operatorname{sen}(0) + e^0 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = f'_{(0,1)}(0,0) = \operatorname{sen}(0) + e^1 = e$$

Assim

$$f(h_1,h_2) = 0 + h_1 + e\,h_2 + \sqrt{h_1^2+h_2^2}\,\varepsilon(h_1,h_2), \text{ donde}$$

$$\varepsilon(h_1,h_2) = \frac{f(h_1,h_2) - h_1 - e\,h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$0 \leq |\varepsilon(h_1,h_2)| = \left|\frac{f(h_1,h_2) - h_1 - e\,h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| \leq \frac{|f(h_1,h_2)| + |h_1| + e\,|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$\leq \frac{\|(h_1,h_2)\|^2 - 4(|h_1| + |h_2|) + |h_1| + e\,|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \frac{h_1^2+h_2^2 - 3|h_1| + (e-4)|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \frac{h_1^2+h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

Como $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} 0 = 0$ e $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2} = 0$,

o Teorema das funções enquadradas garante que

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} |\varepsilon(h_1,h_2)| = 0 \quad (=)$$

$$(=) \quad \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$$

Podemos então concluir que f é diferenciável em $(0,0)$.