FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática II E

2º Teste — 18 de Dezembro de 2017
(Duração 1:30)

1. **[4.0 val.]** Determine e classifique os pontos estacionários da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:
$$f(x, y) = x \log^2(x) + xy^2$$

2. Considere a equação $\log(xyz) + e^{x+2y-e\,z} = 0$.

   (a) **[2.5 val.]** Mostre que esta equação define x como função implícita de y e z numa vizinhança de $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{2}{e}\right)$. Justifique detalhadamente a sua resposta.

   (b) **[2.5 val.]** Calcule $\frac{\partial x}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{e}\right)$ e $\frac{\partial x}{\partial z}\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{e}\right)$.

3. **[3.0 val.]** Utilizando coordenadas polares, calcule a área do domínio plano correspondente ao conjunto:
$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \geq 1 \ \wedge \ x^2 + (y-2)^2 \leq 4\right\}$$

4. **[3.0 val.]** Usando coordenadas cilíndricas, calcule o volume do sólido limitado pela superfície esférica $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$ e interior ao cilindro de equação $x^2 + y^2 = 1$.

5. **[3.0 val.]** Considere o sólido do primeiro octante, limitado superiormente pela superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e inferiormente pela superfície cónica $z^2 = x^2 + y^2$. Sabendo que em cada ponto do sólido a densidade é dada por $d(x, y, z) = z$, usando coordenadas esféricas, calcule a massa do sólido.

   Opção de menor valor: Calcular o volume do mesmo sólido, usando coordenadas esféricas.

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

6. **[2.0 val.]** Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função harmónica num conjunto aberto D, ou seja, $f \in C^2(D)$ e satisfaz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0, \forall (x,y) \in D.$$

Mostre que se $(x_0, y_0) \in D$ é tal que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \neq 0$$

então $f(x_0, y_0)$ não é um extremo de f.