Proposta de Resolução do Segundo Teste de Análise Matemática II E (18/12/2017)

Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução de entre muitas outras possibilidades.

1

Comecemos por determinar o domínio de f:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

Os pontos estacionários de f são os pontos do domínio que satisfazem $\nabla f(x,y) = 0$.

$$\nabla f(x,y)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log^2 x + 2x\log x \,\frac{1}{x} + y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ x=0 \vee y=0 \end{cases}$$

$x=0$ não é solução pois qualquer ponto da forma $(0,y)$ não pertence ao domínio de f.

Para $y=0$ vem:

$$\log^2 x + 2\log x = 0 \Leftrightarrow \log x(\log x + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log x = 0 \vee \log x = -2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = e^{-2}$$

Assim, os pontos estacionários de f são

$$(1,0) \text{ e } (e^{-2},0)$$

Atendendo a que $f \in \mathcal{C}^2(D)$, classifiquemos os pontos estacionários recorrendo ao teste da Hessiana.

$$\text{Hess } f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\log x \frac{1}{x} + \frac{2}{x} & 2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$

$$|\text{Hess } f(1,0)| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$ logo $(1,0)$ é ponto de extremo relativo. Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 2 > 0$, o ponto $(1,0)$ é um ponto de mínimo relativo.

$$|\text{Hess } f(e^{-2},0)| = \begin{vmatrix} -4e^2 + 2e^2 & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{vmatrix} = -2e^2 \, 2e^{-2} = -4 < 0$$

logo o ponto $(e^{-2},0)$ não é um ponto de extremo relativo, sendo um ponto de sela.

② a) Seja $F(x,y,z) = \log(xyz) + e^{x+2y} - ez$

i)
$$F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{2}{e}\right) = \log\left(\frac{1}{e}\right) + e^{1+1-2} = \log(e^{-1}) + e^0 = -1 + 1 = 0$$

ii) F é de classe $\mathcal{C}^1$ numa vizinhança de $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{2}{e}\right)$ dado que as suas derivadas parciais de primeira ordem são funções contínuas.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = \frac{yz}{xyz} + e^{x+2y-ez} = \frac{1}{x} + e^{x+2y-ez}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = \frac{xz}{xyz} + 2e^{x+2y-ez} = \frac{1}{y} + 2e^{x+2y-ez}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = \frac{xy}{xyz} - e\,e^{x+2y-ez} = \frac{1}{z} - e\,e^{x+2y-ez}$$

Todas estas funções são contínuas perto de $(1,\frac{1}{2},\frac{2}{e})$, dado que resultam de operações sobre funções contínuas (somas, produtos, quocientes, composições) e estão bem definidas (pois $xyz>0$ perto de $(1,1/2,\frac{2}{e})$).

iii)

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(1,\frac{1}{2},\frac{2}{e}\right) = 1 + e^{1+1-2} = 2 \neq 0$$

Pelo Teorema da Função Implícita existem $\alpha,\beta,\gamma>0$ tais que para $x \in \left]1-\alpha, 1+\alpha\right[$, $y \in \left]\frac{1}{2}-\beta, \frac{1}{2}+\beta\right[$, $z \in \left]\frac{2}{e}-\gamma, \frac{2}{e}+\gamma\right[$,

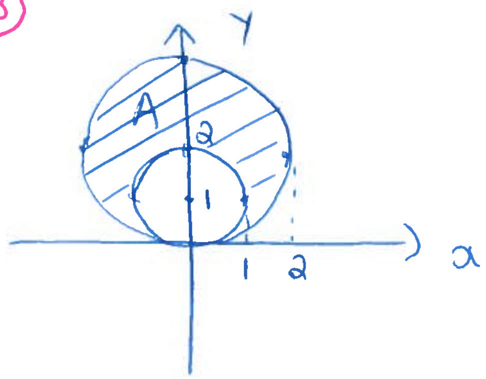
$$x = \phi(y,z) \Leftrightarrow F(x,y,z) = 0, \text{ com } \phi \text{ de classe } C^1.$$

2 b)

$$\frac{\partial x}{\partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{2}{e}\right) = \frac{\partial \phi}{\partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{2}{e}\right) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}\left(1,\frac{1}{2},\frac{2}{e}\right)}{\frac{\partial F}{\partial x}\left(1,\frac{1}{2},\frac{2}{e}\right)} = -\frac{2+2}{2} = -2$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}\left(\frac{1}{2},\frac{2}{e}\right) = \frac{\partial \phi}{\partial z}\left(\frac{1}{2},\frac{2}{e}\right) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}\left(1,\frac{1}{2},\frac{2}{e}\right)}{\frac{\partial F}{\partial x}\left(1,\frac{1}{2},\frac{2}{e}\right)} = -\frac{\frac{e}{2}-e}{2} = \frac{e}{4}$$

3



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta & 0 \leq \theta \leq \pi \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta & 2\operatorname{sen}\theta \leq \rho \leq 4\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$x^2+(y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2+y^2-2y+\cancel{1}=\cancel{1} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \rho^2 - 2\rho\operatorname{sen}\theta = 0 \Leftrightarrow \rho(\rho - 2\operatorname{sen}\theta) = 0$
$\Leftrightarrow \rho = 0 \vee \rho = 2\operatorname{sen}\theta$

$x^2+(y-2)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2+y^2-4y+\cancel{4}=\cancel{4} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \rho^2 - 4\rho\operatorname{sen}\theta = 0 \Leftrightarrow \rho(\rho-4\operatorname{sen}\theta) = 0$
$\Leftrightarrow \rho = 0 \vee \rho = 4\operatorname{sen}\theta$

$$\text{Área} = \iint_A 1\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_{2\operatorname{sen}\theta}^{4\operatorname{sen}\theta} \rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{2\operatorname{sen}\theta}^{4\operatorname{sen}\theta} d\theta =$$

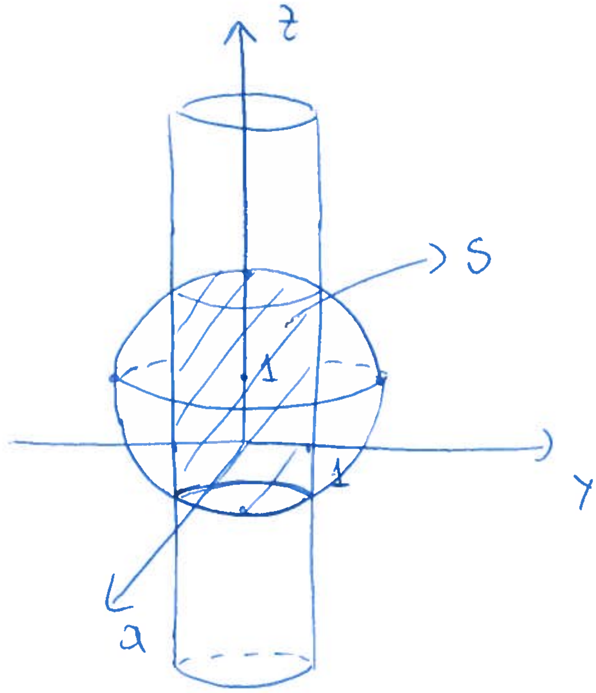
$1 = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta$
$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$
$1-\cos(2\theta) = 2\operatorname{sen}^2\theta$

$$= \int_0^{\pi} 8\operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi} 6\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} 6\,\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,d\theta = 3\int_0^{\pi} 1-\cos(2\theta)\,d\theta =$$

$$= 3\left[\theta - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi} = 3\pi$$

4



$$\begin{cases} x = r\cos\theta & 0\le\theta\le 2\pi \\ y = r\sin\theta & 0\le r\le 1 \\ z = z & 1-\sqrt{4-r^2}\le z\le 1+\sqrt{4-r^2}\end{cases}$$

$$x^2+y^2+(z-1)^2=4$$
$$\Leftrightarrow r^2+(z-1)^2=4$$
$$\Leftrightarrow (z-1)^2=4-r^2$$
$$\Leftrightarrow z=1\pm\sqrt{4-r^2}$$

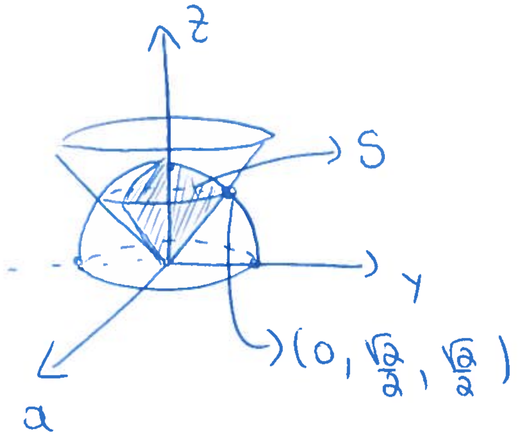
$$\text{volume} = \iiint_S 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-\sqrt{4-r^2}}^{1+\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$= 2\pi\int_0^1 \left[rz\right]_{1-\sqrt{4-r^2}}^{1+\sqrt{4-r^2}} = 2\pi\int_0^1 2r\sqrt{4-r^2}\,dr =$$

$$= 2\pi\left[-(4-r^2)^{3/2}\,\frac{2}{3}\right]_0^1 = 2\pi\left(-3^{3/2}+4^{3/2}\right)\frac{2}{3} =$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right)$$

5



$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/4 \end{array}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z^2 = x^2+y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2z^2 = 1 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} z^2 = \frac{1}{2} \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} z = \cancel{\pm}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x^2+y^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Massa} = \iiint_S d(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S z\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 \rho\cos\varphi\,\rho^2\operatorname{sen}\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 \rho^3\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/4}\left[\frac{\rho^4}{4}\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\right]_0^1 d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{8}\int_0^{\pi/4}\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}\,\frac{1}{4} = \frac{\pi}{32}$$

(6)

Sendo D um conjunto aberto, se (x_0, y_0) não é ponto estacionário de f então $f(x_0, y_0)$ não é extremo.

Suponhamos que (x_0, y_0) é um ponto estacionário de f.

Como $f \in C^2(D)$ usemos o teste da Hessiana para classificar (x_0, y_0).

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2 =$$

(pois $f \in C^2(D)$)

$$= -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2 \leq 0$$

(pois $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$)

Se o determinante for negativo então $f(x_0, y_0)$ não é extremo ((x_0, y_0) é um ponto de sela). Tal sucede desde que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$