FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática II E – 2º Semestre 2017/18

Exame de Recurso — 29 de Junho de 2018
(Duração 3h)

1. **[1.3 val.]** Determine a família de soluções da equação diferencial ordinária de primeira ordem:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+13}{x^2+4}y$$

2. Num dia de Verão, com $28°$ C de temperatura ambiente, um vendedor sai para a praia com a sua geleira a $5°$ C carregada de bolas de Berlim. Sabe-se que ao fim de 5 minutos a temperatura da geleira aumentou $2°$ C.
   (a) **[0.5 val.]** Utilize o modelo de variação da temperatura de Newton para modelar matematicamente a situação descrita, definindo o problema de valor inicial que lhe corresponde.
   (b) **[0.5 val.]** Determine a solução do problema de valor inicial definido na alínea anterior.
   (c) **[0.5 val.]** Sabendo que ninguém quer comprar bolas de Berlim que estejam a $23°$ C, determine ao fim de quanto tempo o vendedor tem de regressar para trocar de geleira.

3. Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:
$$f(x,y) = \sqrt[4]{1-\frac{x^2}{4}-y^2} + \frac{\log(x^2-y^2-1)\operatorname{sen}(x^2y)}{xy}$$
   (a) **[0.8 val.]** Determine o conjunto D, domínio de f, esboçando uma sua representação gráfica.
   (b) **[0.9 val.]** Indique $int(D)$ e $fr(D)$. O conjunto D é aberto? E fechado? Justifique.
   (c) **[1.0 val.]** É possível prolongar f por continuidade ao ponto $(1,0)$?

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

4. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy^2}-1}{x^2+y^2} & \text{, se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{, se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) **[1.0 val.]** Mostre que g é contínua em $(0,0)$.
   (b) **[0.8 val.]** Considere $\vec{u} = (1,1)$. Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$ e $g'_{\vec{u}}(0,0)$.
   (c) **[0.5 val.]** Diga, justificando, se g é diferenciável em $(0,0)$.

5. Seja $h : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma função definida por

$$h(x,y) = \left(e^{x^2 y}, \operatorname{arcsen}(x-y^2), \log\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

   e $m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, com gradiente no ponto $(e,0,0)$ dado por $\nabla m(e,0,0) = [3 \;\; -2 \;\; 1]^\top$.

   (a) **[0.2 val.]** Justifique que $m \circ h$ é diferenciável em $(1,1)$.
   (b) **[0.8 val.]** Calcule $\nabla(m \circ h)(1,1)$.

6. **[1.2 val.]** Seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto tal que para $a, x \in D$ o segmento de recta que une a a x também está contido em D. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$. Mostre que:

$$f(x) = f(a) + \int_0^1 \nabla f(a + t(x-a))^\top (x-a)\, dt$$

7. **[1.8 val.]** Geometricamente, a zona circundante da cratera de um vulcão pode ser aproximada pela curva

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \; .$$

   Em relação a um valor de referência, para cada ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, a altitude é definida por $f(x,y) = xy$. Determine a altitude máxima e mínima que um montanhista encontrará ao explorar a região considerada.

8. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por $f(x,y) = (\log(\cos(xy)), \operatorname{arctg}(x^2 y))$.

   (a) **[1.0 val.]** Mostre que f é invertível numa vizinhança de $(1, \frac{\pi}{3})$. Justifique detalhadamente a sua resposta.
   (b) **[1.0 val.]** Determine a matriz jacobiana de f^{-1} no ponto $(-\log(2), \operatorname{arctg}(\frac{\pi}{3}))$.
   (c) **[0.5 val.]** Será f globalmente invertível no seu domínio? Justifique detalhadamente a sua resposta.

9. **[1.5 val.]** Sejam $0 < r < R$ e E o domínio definido pelas semi-esferas:

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \wedge z \leq 0\right\}.$$

Usando coordenadas esféricas, calcule

$$\int\int\int_E z^2 dx\, dy\, dz$$

10. Considere os parabolóides de equações $\frac{z}{3} = x^2 + y^2$ e $z = x^2 + y^2$. Seja S o sólido definido por:

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{z}{3} \leq x^2 + y^2 \leq z \ \wedge \ z \leq 2\right\}.$$

Sabe-se que em cada ponto $(x, y, z) \in S$ a densidade do sólido é dada por $d(x, y, z) = \sqrt{4 - z^2}$.

   (a) **[0.9 val.]** Utilizando coordenadas cilíndricas, represente o cálculo da massa do sólido S na forma de um único integral triplo.

   (b) **[0.6 val.]** Calcule a massa de S.

11. Considere o domínio definido por:

$$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ y \geq 2 - x \ \wedge \ y \geq \frac{\sqrt{3}}{3}x\right\}$$

   (a) **[0.9 val.]** Recorrendo às coordenadas polares, represente

$$\int\int_L \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2} dx\, dy$$

   na forma de um único integral duplo.

   (b) **[0.6 val.]** Calcule o valor do integral duplo mencionado na alínea anterior.

12. **[1.2 val.]** Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $S \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto compacto. Mostre que existe $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in S$ tal que:

$$\int\int\int_S f(x, y, z) dx\, dy\, dz = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) Volume_S$$