Proposta de Resolução do Exame de Recurso de Análise Matemática II E (29/06/2018)

Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução de entre muitas outras possibilidades.

1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+13}{x^2+4}\, y$$

Se $y \neq 0$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+13}{x^2+4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\,dx = \int \frac{3x^2+13}{x^2+4}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{3x^2+13}{x^2+4}\,dx \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{r|l} 3x^2+13 & x^2+4 \\ \hline -3x^2-12 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \log|y| + c_1 = \int 3 + \frac{1}{x^2+4}\,dx, \text{ com } c_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log|y| + c_1 = \int 3 + \frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx, \text{ com } c_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log|y| + c_1 = 3x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c_2, \text{ com } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log|y| = 3x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x/2) + c_3, \text{ com } c_3 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{3x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x/2)} \cdot c_4, \text{ com } c_4 \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

(2)

$\Leftrightarrow y = e^{3x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x/2)} \cdot c_5$, com $c_5 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se $y = 0$

$\frac{dy}{dx} = 0 = \frac{3x^2+13}{x^2+4} \cdot 0$ pelo que $y = 0$ também é solução da equação diferencial.

Assim a família de soluções da equação diferencial são

$$y = e^{3x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x/2)} \cdot c \text{ , com } c \in \mathbb{R}$$

(2)
a) Seja $y(t)$ = temperatura da geleira (em graus centígrados) no instante t (em minutos)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = k(y - 28) \\ y(0) = 5 \\ y(5) = 7 \end{cases}$$

b)

$$\frac{dy}{dt} = k(y-28) \qquad \mu(t) = e^{\int -k\, dt} = e^{-kt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dt} - ky = -28k$$

$$\Leftrightarrow e^{-kt}\frac{dy}{dt} - k e^{-kt} y = -28k\, e^{-kt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-kt} y\right) = -28k\, e^{-kt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-kt} y = \int -28k\, e^{-kt}\, dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-kt} y = 28\, e^{-kt} + c \,, \; c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 28 + c\, e^{kt} \,, \; c \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = 5 \Leftrightarrow 5 = 28 + c \Leftrightarrow c = -23$$

$$\therefore y = 28 - 23\, e^{kt}$$

$$y(5) = 7 \Leftrightarrow 7 = 28 - 23\, e^{5k} \Leftrightarrow \frac{21}{23} = e^{5k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5k = \log\left(\frac{21}{23}\right) \Leftrightarrow k = \frac{1}{5}\log\left(\frac{21}{23}\right)$$

$$\therefore y = 28 - 23\, e^{\frac{1}{5}\log\left(\frac{21}{23}\right) t}$$

e) $23 = 28 - 23\, e^{\frac{1}{5}\log\left(\frac{21}{23}\right)t}$

$\Leftrightarrow \frac{5}{23} = e^{1/5 \log\left(\frac{21}{23}\right)t} \Leftrightarrow \log\left(\frac{5}{23}\right) = \frac{1}{5}\log\left(\frac{21}{23}\right)t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{\log\left(\frac{5}{23}\right)}{\log\left(\frac{21}{23}\right)}$ 5 minutos

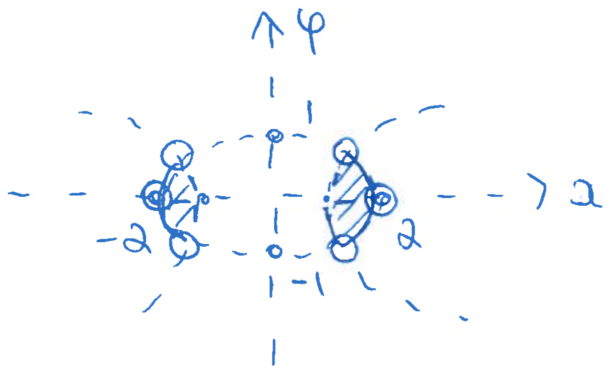
3

a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - \frac{x^2}{4} - y^2 \geq 0 \wedge x^2 - y^2 - 1 > 0 \wedge xy \neq 0\}$

$1 - \frac{x^2}{4} - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$

$x^2 - y^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 > 1$

$xy \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge y \neq 0$



b) $\text{int}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - \frac{x^2}{4} - y^2 > 0 \wedge x^2 - y^2 - 1 > 0 \wedge y \neq 0\}$

$\text{fr}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(1 - \frac{x^2}{4} - y^2 = 0 \wedge x^2 - y^2 - 1 > 0\right)$

$\vee \left(x^2 - y^2 - 1 = 0 \wedge 1 - \frac{x^2}{4} - y^2 \geq 0\right) \vee$

$\vee \left(y = 0 \wedge 1 - \frac{x^4}{4} - y^2 \geq 0 \wedge x^2 - y^2 - 1 > 0\right)\}$

D não é aberto pois $D \neq \text{int}(D)$. Por exemplo, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - \frac{x^2}{4} - y^2 = 0 \wedge x^2 - y^2 - 1 > 0\}$ são pontos do conjunto D, mas não pertencem ao seu interior.

D não é fechado pois $D \neq \bar{D}$. Por exemplo,

$(1,0) \in fr(D) \subset \bar{D}$ mas $(1,0) \notin D$.

e) É possível prolongar f por continuidade ao ponto $(1,0)$ se e só se

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) \quad \text{existe.}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt[4]{1-\frac{x^2}{4}-y^2} + \frac{\log(x^2-y^2-1)\,\text{sen}(x^2y)}{xy}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt[4]{1-\frac{x^2}{4}-y^2} + x\log(x^2-y^2-1)\,\frac{\text{sen}(x^2y)}{x^2y}$$

$$= \sqrt[4]{1-\frac{1}{4}} + 1\times(-\infty)\times 1 = -\infty \quad \text{dado que}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\text{sen}(x^2y)}{x^2y} = 1 \quad \text{pois} \quad \lim_{\omega\to 0}\frac{\text{sen}\,\omega}{\omega} = 1$$

Assim sendo, não é possível prolongar f por continuidade ao ponto $(1,0)$.

4

a)

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} g(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{e^{xy^2}-1}{x^2+y^2} =$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \rho>0\\ \theta\in[0,2\pi[}} \frac{e^{\rho^3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta}-1}{\rho^2} =$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \rho>0\\ \theta\in[0,2\pi[}} \frac{e^{\rho^3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta}-1}{\rho^3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta}\ \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta$$

$= 1 \times 0 = 0$ pois

$\lim_{\rho\to 0} \frac{e^{\rho^3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta}-1}{\rho^3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta} = 1$ dado que $\lim_{\omega\to 0}\frac{e^{\omega}-1}{\omega} = 1$ e

$\lim_{\rho\to 0} \rho^3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta = 0$ pois $\lim_{\rho\to 0}\rho^3 = 0$ e $\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta$ é limitada entre -1 e 1. Como $\lim_{\rho\to 0}\rho = 0$ podemos também concluir que $\lim_{\rho\to 0} \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta = 0$

Atendendo a que $g(0,0)=0$, concluímos que g é contínua em $(0,0)$.

d) $$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1-1}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0,h)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1-1}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Sendo $\vec{u} = (1,1)$ temos

$$g'_{\vec{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g((0,0)+t(1,1)) - g(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{g(t,t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{e^{t^3}-1}{2t^2}}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2}\, \frac{e^{t^3}-1}{t^3} = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2} \quad \text{pois}$$

$$\lim_{\omega\to 0} \frac{e^{\omega}-1}{\omega} = 1$$

e) Se g fosse diferenciável em $(0,0)$ então

$$g'_{\vec{u}}(0,0) = \nabla g(0,0)^T \vec{u} = [0 \;\; 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \neq \frac{1}{2}$$

logo g não é diferenciável em $(0,0)$.

a)

$$\text{Jac } h(x,y) = \begin{bmatrix} e^{x^2y}\, 2xy & e^{x^2y}\, x^2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-(x-y^2)^2}} & \dfrac{-2y}{\sqrt{1-(x-y^2)^2}} \\ -\dfrac{1}{x} & \dfrac{1}{y} \end{bmatrix}$$

Como $\sqrt{1-(x-y^2)^2}$, x e y não se anulam em $(1,1)$ podemos concluir que todas as derivadas parciais são funções contínuas numa vizinhança suficientemente pequena de $(1,1)$. Trata-se do produto, composição e quociente de funções contínuas (exponencial, raiz quadrada e polinómios) logo contínuas.

Sendo de classe C^1 numa vizinhança de $(1,1)$, h é também diferenciável em $(1,1)$.

Por outro lado m é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ logo é diferenciável em $(e,0,0) = h(1,1)$.

Pelo teorema da função composta, $m \circ h$ é diferenciável em $(1,1)$.

b)

Recorrendo ainda ao teorema da diferenciação da função composta sabemos que

$$Jac\,(mo h)(1,1) = Jac\, m\,(h(1,1))\ \times Jac\, h(1,1) =$$

$$= Jac\, m\,(e,0,0) \times Jac\, h(1,1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2e & e \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6e-3 & 3e+5 \end{bmatrix}$$

$$= \nabla (mo h)(1,1)^T$$

6) Para $t \in [0,1]$ consideremos $h(t) = f(a + t(x-a))$

h é diferenciável pois é a composta de funções diferenciáveis (f que é de classe $C^1(D)$ logo diferenciável em D e $a + t(x-a)$ que é uma função linear em t)

Pelo teorema da função composta,

$$h'(t) = \nabla f(a + t(x-a))^T (x-a),$$ que é uma função contínua em t pois resulta do produto e da composta de funções contínuas (dado que f é de classe $C^1(D)$).

Assim $\int_0^1 \nabla f(a+t(x-a))^T (x-a)\,dt$ está bem

definido e

$$\int_0^1 \nabla f(a+t(x-a))^T (x-a)\,dt = \int_0^1 h'(t)\,dt =$$

$$= [h(t)]_0^1 = h(1) - h(0) = f(x) - f(a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(a) + \int_0^1 \nabla f(a+t(x-a))^T (x-a)\,dt$$

(f) Pretendemos $\max\limits_{\min} \; xy$

$$\text{s.a} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Consideremos a função Lagrangeana associada ao problema

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy - \lambda\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1\right) \quad \text{com } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\nabla \mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y - \frac{\lambda x}{2} = 0 \\ x - \lambda \frac{2y}{9} = 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy - \frac{\lambda x^2}{2} = 0 \\ xy - \lambda \frac{2}{9} y^2 = 0 \\ \_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\lambda x^2}{2} + \lambda \frac{2}{9} y^2 = 0 \\ = \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{2}{9} y^2 \right) = 0 \\ = \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \ \vee \ x^2 = \frac{4}{9} y^2 \\ = \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$ então $y = 0$ e $x = 0$, pelo que $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 0 \neq 1$

Se $x^2 = \frac{4}{9} y^2$ temos $\frac{y^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{9} y^2 = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow y = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$x^2 = \frac{4}{9}\frac{9}{2} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Como xy é contínua em $\mathbb{R}^2$ pois é uma função polinomial e $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}$ é um conjunto compacto (fechado e limitado), o teorema de Weierstrass garante que xy tem um máximo e um mínimo absolutos no conjunto.

Os candidatos a máximo e mínimos absolutos são

$$\left(\sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right), \left(\sqrt{2}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right), \left(-\sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \text{ e } \left(-\sqrt{2}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

Como

$$\sqrt{2}\,\frac{3}{\sqrt{2}} = (-\sqrt{2})\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 3 \quad e \quad -\sqrt{2}\,\frac{3}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = -3$$

temos que a altitude máxima encontrada será 3 e a altitude mínima encontrada será −3.

8

a)

$$\operatorname{Jac} f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{-\operatorname{sen}(xy)\,y}{\cos(xy)} & \dfrac{-\operatorname{sen}(xy)\,x}{\cos(xy)} \\[2ex] \dfrac{2xy}{1+(x^2y)^2} & \dfrac{x^2}{1+(x^2y)^2} \end{bmatrix}$$

Como $\cos(1\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \neq 0$ podemos concluir que as derivadas parciais são funções contínuas numa vizinhança suficientemente pequena de $(1, \pi/3)$, dado que resultam de composições, quocientes e produtos de funções contínuas (polinómios, seno e cosseno).

$$|\operatorname{Jac} f(1,\pi/3)| = \begin{vmatrix} -\sqrt{3}\,\pi/3 & -\sqrt{3} \\[1ex] \dfrac{2\pi/3}{1+\frac{\pi^2}{9}} & \dfrac{1}{1+\frac{\pi^2}{9}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{1+\frac{\pi^2}{9}}\,\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{1+\frac{\pi^2}{9}}\,\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{1+\frac{\pi^2}{9}}\,\frac{\pi}{3} \neq 0$$

Pelo teorema da função inversa podemos concluir que f é localmente invertível numa vizinhança de $(1, \pi/3)$.

b) $$f(1, \pi/3) = (\log(\cos \pi/3), \operatorname{arctg}(\pi/3)) =$$
$$= (\log(1/2), \operatorname{arctg}(\pi/3)) = (-\log 2, \operatorname{arctg}(\pi/3))$$

Assim, o teorema da função inversa garante que

$$\operatorname{Jac} f^{-1}(-\log 2, \operatorname{arctg}(\pi/3)) = \operatorname{inv}\left(\operatorname{Jac} f(1, \pi/3)\right) =$$

$$= \operatorname{inv}\left(\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}\pi}{3} & -\sqrt{3} \\ \frac{2\pi/3}{1+\frac{\pi^2}{9}} & \frac{1}{1+\frac{\pi^2}{9}} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{1+\frac{\pi^2}{9}} \quad \frac{\pi}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\frac{\pi^2}{9}} & \sqrt{3} \\ -\frac{2\pi/3}{1+\frac{\pi^2}{9}} & -\frac{\sqrt{3}}{3}\pi \end{bmatrix}$$

$$= \left(1+\frac{\pi^2}{9}\right)\frac{\sqrt{3}}{\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\frac{\pi^2}{9}} & \sqrt{3} \\ \frac{-2\pi/3}{1+\frac{\pi^2}{9}} & -\frac{\sqrt{3}}{3}\pi \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\pi} & \left(1+\frac{\pi^2}{9}\right)\frac{3}{\pi} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & -\left(1+\frac{\pi^2}{9}\right) \end{bmatrix}$$

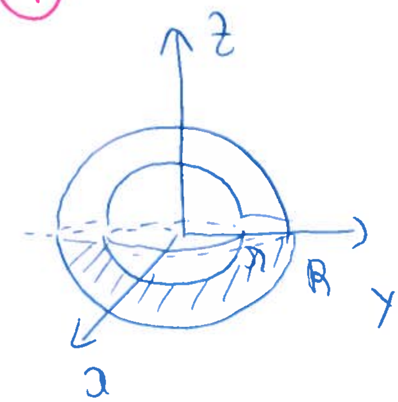
2)

f não é globalmente invertível no seu domínio pois não é injectiva.

Por exemplo $(-1,1) \neq (1,1)$ mas

$$f(-1,1) = (\log(\cos(-1)), \operatorname{arctg} 1) =$$
$$= (\log(\cos 1), \operatorname{arctg} 1) =$$
$$= f(1,1)$$

(9)



$$\begin{cases} x = \rho \,\text{sen}\varphi \cos\theta & r \le \rho \le R \\ y = \rho \,\text{sen}\varphi \,\text{sen}\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \\ z = \rho \cos\varphi & \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi \end{cases}$$

$$|J| = \rho^2 \text{sen}\varphi$$

$$\iiint_E z^2 \,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_r^R \rho^2\cos^2\varphi\, \rho^2 \,\text{sen}\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \left[\frac{\rho^5}{5} \cos^2\varphi \,\text{sen}\varphi \right]_r^R d\varphi\, d\theta =$$

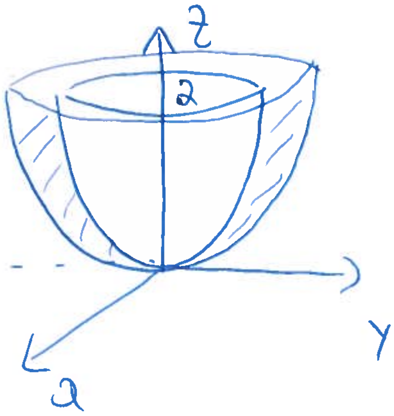
$$= \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{R^5}{5} - \frac{r^5}{5} \right) \cos^2\varphi \,\text{sen}\varphi \, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \left(\frac{R^5}{5} - \frac{r^5}{5} \right) 2\pi \left[-\frac{\cos^3\varphi}{3} \right]_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \left(\frac{R^5}{5} - \frac{r^5}{5} \right) 2\pi \left(\frac{1}{3} \right)$$

10

a)



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le z \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ \sqrt{\frac{z}{3}} \le r \le \sqrt{z} \end{array}$$

$$|J| = r$$

$$\frac{z}{3} = x^2+y^2 \Leftrightarrow \frac{z}{3} = r^2 \Leftrightarrow r = \cancel{\pm}\sqrt{\frac{z}{3}}$$

$$z = x^2+y^2 \Leftrightarrow z = r^2 \Leftrightarrow r = \cancel{\pm}\sqrt{z}$$

$$\text{Massa} = \iiint_S \sqrt{4-z^2}\, dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\sqrt{\frac{z}{3}}}^{\sqrt{z}} r\sqrt{4-z^2}\, dr\,dz\,d\theta$$

b)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\sqrt{\frac{z}{3}}}^{\sqrt{z}} r\sqrt{4-z^2}\, dr\,dz\,d\theta =$$

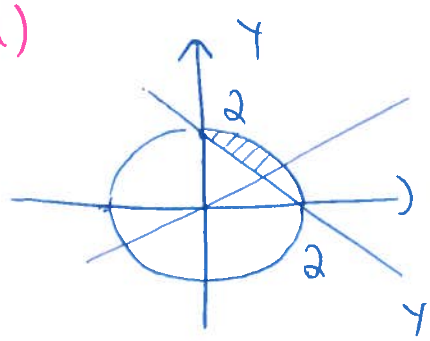
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[\frac{r^2}{2}\sqrt{4-z^2}\right]_{\sqrt{\frac{z}{3}}}^{\sqrt{z}} dz\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{4-z^2}\left(\frac{z}{2}-\frac{z}{6}\right) dz\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{z}{3}\sqrt{4-z^2}\, dz\,d\theta = 2\pi\left[-\frac{(4-z^2)^{3/2}}{9}\right]_0^2 =$$

$$= 2\pi\,\frac{4^{3/2}}{9} = \frac{16}{9}\pi$$

a)



$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

$y = 2 - x$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \pi/2 \qquad \frac{2}{\text{sen}\,\theta + \cos\theta} \leq \rho \leq 2$$

$|J| = \rho$

$$y = 2 - x \Leftrightarrow \rho\,\text{sen}\,\theta = 2 - \rho\cos\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho\,\text{sen}\,\theta + \rho\cos\theta = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho\,(\text{sen}\,\theta + \cos\theta) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho = \frac{2}{\text{sen}\,\theta + \cos\theta}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \Leftrightarrow \rho\,\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}\rho\cos\theta \underset{\rho \neq 0}{\Leftrightarrow} \text{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \underset{\theta \in 1^{\circ}Q}{\Rightarrow} \theta = \pi/6$$

$$\iint_L \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{\frac{2}{\text{sen}\,\theta + \cos\theta}}^{2} \frac{(\rho\cos\theta + \rho\,\text{sen}\,\theta)^2}{\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

b)

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{\frac{2}{\text{sen}\,\theta + \cos\theta}}^{2} (\cos\theta + \text{sen}\,\theta)^2 \rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left[(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)^2 \frac{\rho^2}{2} \right]_{\frac{2}{\text{sen}\,\theta + \cos\theta}}^{2} d\theta =$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} 2(\cos\theta + \sin\theta)^2 - 2 \, d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2} 2 + 4\cos\theta \sin\theta - 2 \, d\theta =$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} 2\sin(2\theta) \, d\theta = \left[-\cos(2\theta) \right]_{\pi/6}^{\pi/2} = 1 + \cos \pi/3 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

12 f é contínua e S é um conjunto compacto, pelo que o teorema de Weierstrass garante que f tem um máximo (M) e um mínimo (m) absolutos em S.

Assim,

$$\forall (x,y,z) \in S, \quad m \leq f(x,y,z) \leq M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iiint_S m \, dx\,dy\,dz \leq \iiint_S f(x,y,z) \, dx\,dy\,dz \leq \iiint_S M \, dx\,dy\,dz$$

$$\Leftrightarrow m \, \mathrm{vol}_S \leq \iiint_S f(x,y,z) \, dx\,dy\,dz \leq M \, \mathrm{vol}_S \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{\iiint_S f(x,y,z) \, dx\,dy\,dz}{\mathrm{vol}\, S} \leq M$$

Como f é contínua, pelo teorema de Bolzano existe $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in S$ tal que

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{\iiint_S f(x,y,z) \, dx\,dy\,dz}{\mathrm{vol}\, S}$$