FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática II E – 2º Semestre 2017/18

1º Teste — 2 de Maio de 2018
(Duração 1:30)

1. **[2.5 val.]** Considere $x \in]-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}[$.Determine a família de soluções da equação diferencial ordinária de primeira ordem:

$$\frac{dy}{dx} - 2xy\,\mathrm{tg}(x^2) = x^3$$

2. O Manel Jolas, aluno do MIEI da FCT NOVA, decidiu comemorar a nota obtida no primeiro teste de Análise Matemática II E bebendo umas cervejas num bar, com uns amigos. Nesse consumo, ingeriu $40gr$ de álcool. Em média, sabe-se que alguém com compleição física semelhante ao Manel elimina $8.5gr$ de álcool do organismo, na primeira hora, de acordo com um modelo exponencial.

   (a) **[1.0 val.]** Modele matematicamente a situação descrita, definindo o problema de valor inicial que lhe corresponde.

   (b) **[1.0 val.]** Determine a solução do problema de valor inicial definido na alínea anterior.

   (c) **[1.0 val.]** O Manel é um jovem responsável. Quanto tempo será necessário para que tenha apenas $14gr$ de álcool no organismo, o que lhe permitirá cumprir os limites legais exigidos para condução?

3. Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \frac{\mathrm{sen}(x-y)}{x^2-y^2} + \sqrt{\frac{x^2+y^2-1}{4x^2+y^2-4}}$$

   (a) **[1.5 val.]** Determine o conjunto D, domínio de f, esboçando uma sua representação gráfica.

   (b) **[1.5 val.]** Indique $int(D)$ e $fr(D)$. O conjunto D é aberto? E fechado? Justifique.

   (c) **[2.5 val.]** É possível prolongar f por continuidade ao ponto $(1,1)$? Caso seja possível, defina a correspondente função prolongamento.

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

4. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - y^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{, se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) **[2.5 val.]** Analise a diferenciabilidade de g em $(0,0)$.

(b) **[1.5 val.]** Considere $\vec{u} = (-1,1)$. Determine $g'_{\vec{u}}(0,0)$.

5. Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a função definida por

$$h(x,y) = (xe^y + \cos(\pi y), x^2, x - e^y)$$

(a) **[1.5 val.]** Justifique que h é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e calcule a respectiva matriz jacobiana.

(b) **[1.0 val.]** Usando uma aproximação linear, determine o valor de $h(1.02, 0.01)$.

6. **[2.5 val.]** Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função linear. Considere o conjunto de vectores $\{u_1, \ldots, u_n\}$, que satisfaz:

- $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$;
- $f(u_i) = i, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$;
- $\vec{u} = u_1 + \ldots + u_n$.

Mostre que:

$$f'_{\vec{u}}(x) = \frac{n(n+1)}{2}, \forall x \in \mathbb{R}^n$$