Proposta de Resolução do Primeiro Teste de Análise Matemática II E (2/5/2018)

Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução de entre muitas outras possibilidades.

1. $\frac{dy}{dx} - 2xy\,tg(x^2) = x^3$ → EDO linear de primeira ordem

Começamos por calcular o factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int -2x\,tg(x^2)\,dx} = e^{\int -\frac{2x\,sen(x^2)}{cos(x^2)}\,dx} =$$

$$= e^{\log|cos(x^2)|} = |cos(x^2)| = cos(x^2) \text{ pois } x \in]-\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}, \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}[$$

Assim

$$\frac{dy}{dx} - 2xy\,tg(x^2) = x^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}cos(x^2) - 2x\,sen(x^2)\,y = x^3 cos(x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(y\,cos(x^2)\right) = x^3 cos(x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y\,cos(x^2) = \int x^3 cos(x^2)\,dx$$

Utilizando primitivação por partes temos:

$$\int x^3 cos(x^2)\,dx = \frac{x^2}{2} sin(x^2) - \int x\,sin(x^2)\,dx \qquad f(x) = x\,cos(x^2) \quad F(x) = \frac{sen(x^2)}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2} sin(x^2) + \frac{cos(x^2)}{2} + c, \text{ com } c \in \mathbb{R} \qquad g(x) = x^2 \quad g'(x) = 2x$$

Logo

$$y = \frac{x^2}{2} tg(x^2) + \frac{1}{2} + c, \text{ com } c \in \mathbb{R}$$

②

a) Seja $y(t)$ a quantidade de álcool (em gr) no organismo do Hamel, no instante t (em horas)
Então, o problema de valor inicial correspondente será:

$$\begin{cases} y(0) = 40 \\ \frac{dy}{dt} = ky \end{cases}$$

Adicionalmente, sabemos que $y(1) = 40 - 8.5 = 31.5$, o que permitirá determinar o valor de k.

b) Considerando $y \neq 0$ temos

$$\frac{dy}{dt} = ky \Leftrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = k \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}\,dt = \int k\,dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log|y| = kt + c_1, \text{ com } c_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |y| = e^{kt} c_2, \text{ com }$$
$$c_2 \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow y = e^{kt} c_3, \text{ com } c_3 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Como $y = 0$ é solução da equação, a sua solução geral será dada por

$$y = c e^{kt}, \text{ com } c \in \mathbb{R}$$

$y(0) = 40 \Leftrightarrow 40 = c$

$y(1) = 31.5 \Leftrightarrow 31.5 = 40 e^{k} \Leftrightarrow e^{k} = \frac{31.5}{40} \Leftrightarrow k = \log\left(\frac{31.5}{40}\right)$

A solução do problema de valor inicial considerado é ③

$$y = 40\, e^{\log\left(\frac{31.5}{40}\right) t}$$, com $t \in \mathbb{R}_0^+$ pois representa o tempo.

e) $14 = 40\, e^{\log\left(\frac{31.5}{40}\right) t} \Leftrightarrow \frac{14}{40} = e^{\log\left(\frac{31.5}{40}\right) t} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log\left(\frac{14}{40}\right) = \log\left(\frac{31.5}{40}\right) t \Leftrightarrow t = \dfrac{\log\left(\frac{14}{40}\right)}{\log\left(\frac{31.5}{40}\right)}$

Serão necessárias $\dfrac{\log\left(\frac{14}{40}\right)}{\log\left(\frac{31.5}{40}\right)}$ horas.

③

a) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \neq 0 \wedge \dfrac{x^2+y^2-1}{4x^2+y^2-4} \geq 0 \wedge 4x^2+y^2-4 \neq 0\right\}$

$x^2 - y^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) \neq 0 \Leftrightarrow x - y \neq 0 \wedge x + y \neq 0 \Leftrightarrow$

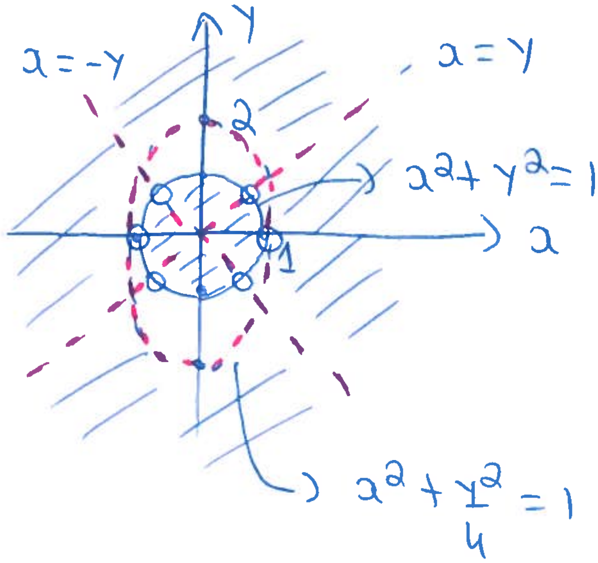
$\Leftrightarrow x \neq y \wedge x \neq -y$

$\dfrac{x^2+y^2-1}{4x^2+y^2-4} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2+y^2-1 \geq 0 \wedge 4x^2+y^2-4 > 0) \vee$

$(x^2+y^2-1 \leq 0 \wedge 4x^2+y^2-4 < 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2 \geq 1 \wedge x^2 + \frac{y^2}{4} > 1\right) \vee \left(x^2+y^2 \leq 1 \wedge x^2 + \frac{y^2}{4} < 1\right)$

$4x^2 + y^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{4} \neq 1$



▨ → domínio

b) $int(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2<1 \vee x^2+\frac{y^2}{4}>1) \wedge x^2-y^2 \neq 0\}$

$fr(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1 \vee x^2+\frac{y^2}{4}=1 \vee$

$(x^2-y^2=0 \wedge \frac{x^2+y^2-1}{4x^2+y^2-4} \geq 0)\}$

D não é aberto pois $D \neq int(D)$. Por exemplo, $(0,1) \in D$ mas $(0,1) \notin int(D)$.

D não é fechado pois $D \neq \bar{D}$. Por exemplo, $(1,0) \in fr(D) \subseteq \bar{D}$ mas $(1,0) \notin D$

c) É possível prolongar f por continuidade ao ponto $(1,1)$ se existir $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \left(\frac{\operatorname{sen}(x-y)}{(x-y)(x+y)} + \sqrt{\frac{x^2+y^2-1}{4x^2+y^2-4}} \right) =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \left(\frac{\operatorname{sen}(x-y)}{x-y} \frac{1}{x+y} + \sqrt{\frac{x^2+y^2-1}{4x^2+y^2-4}} \right) = 1 \times \frac{1}{2} + \sqrt{1}$$

$$= 3/2$$

Nota-se que

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{x-y} = 1 \text{ pois } \lim_{\omega\to 0} \frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega} = 1$$

Assim sendo, a função prolongamento $\bar{f}$ será definida como

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x-y)}{x^2-y^2} + \sqrt{\dfrac{x^2+y^2-1}{4x^2+y^2-4}} & \text{se } (x,y)\in D \\[2ex] 3/2 & \text{se } (x,y) = (1,1) \end{cases}$$

4

a)

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4}}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0,h)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h^5}{h^4}}{h} = \lim_{h\to 0} -1 = -1$$

g é diferenciável em $(0,0)$ $\Leftrightarrow$

$$g(h_1,h_2) = g(0,0) + dg(0,0)(h_1,h_2) + \|(h_1,h_2)\|\,\varepsilon(h_1,h_2),$$

com $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$

Assim

$$\frac{h_1^5 - h_2^5}{(h_1^2+h_2^2)^2} = h_1 - h_2 + \sqrt{h_1^2+h_2^2}\ \varepsilon(h_1,h_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(h_1,h_2) = \frac{\dfrac{h_1^5-h_2^5}{(h_1^2+h_2^2)^2} - h_1 + h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\dfrac{h_1^5-h_2^5}{(h_1^2+h_2^2)^2} - h_1 + h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$\begin{cases} h_1 = \rho\cos\theta \\ h_2 = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

$\theta \in [0, 2\pi[$

$\rho > 0$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\dfrac{\rho^5(\cos^5\theta - \text{sen}^5\theta)}{\rho^4} - \rho\cos\theta + \rho\,\text{sen}\,\theta}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \cos^5\theta - \text{sen}^5\theta - \cos\theta + \text{sen}\,\theta =$$

$$= \cos^5\theta - \text{sen}^5\theta - \cos\theta + \text{sen}\,\theta$$

cujo valor varia com θ pelo que o limite não existe. Assim sendo, g não é diferenciável em $(0,0)$.

b)

Como g não é diferenciável em $(0,0)$, a derivada terá de ser calculada por definição

$$g'_{\vec{u}}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{g((0,0)+t(-1,1)) - g(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{g(-t,t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{-t^5 - t^5}{(2t^2)^2}}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{-2\cancel{t^5}}{4\cancel{t^5}} = -\frac{1}{2}$$

5

a)

$$\text{Jac } h(x,y) = \begin{bmatrix} e^y & xe^y - \sin(\pi y)\pi \\ 2x & 0 \\ 1 & -e^y \end{bmatrix}$$

Como todas as derivadas parciais são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$, pois são exponenciais, simétricas de exponenciais, polinómios ou compostas, produtos e diferenças de funções contínuas, temos que $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$.
Em particular, h é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

b)

h é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, logo é diferenciável em $(1,0)$

$$h(1.02, 0.01) = h(1+0.02, 0+0.01) \simeq$$

$$\simeq h(1,0) + dh(1,0)(0.02, 0.01) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+1 \\ 1 \\ 1-1 \end{bmatrix} + \text{Jac}\, h(1,0) \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.01 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.01 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.03 \\ 0.04 \\ 0.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.03 \\ 1.04 \\ 0.01 \end{bmatrix}$$

6

$$f'_{\vec{u}}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+hu) - f(a)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{f(a)} + h f(u) - \cancel{f(a)}}{h} = \lim_{h \to 0} f(u) =$$
(f é linear)

$$= f(u) = f(u_1 + \cdots + u_m) = f(u_1) + \cdots + f(u_m) =$$
(f é linear)

$$= 1 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}$$
($f(u_i) = i$)

pois corresponde à soma dos m primeiros termos de uma progressão aritmética