FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática II E – 2º Semestre 2017/18

2º Teste — 12 de Junho de 2018
(Duração 1:30)

1. **[3.5 val.]** Determine e classifique os pontos estacionários da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:
$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2$$

2. Considere a equação
$$e^{\operatorname{sen}(x+y)} + \log(x^2 + 3y + z) = e$$

   (a) **[2.5 val.]** Mostre que esta equação define x como função implícita de y e z numa vizinhança de $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 1 - \frac{\pi^2}{16} - \frac{3\pi}{4}\right)$. Justifique detalhadamente a sua resposta.

   (b) **[2.5 val.]** Na vizinhança considerada na alínea anterior, mostre que
$$\frac{\partial x}{\partial y}(y, z) + (2x - 3)\frac{\partial x}{\partial z}(y, z) = -1$$

3. Considere o sólido homogéneo S, interior ao cilindro de equação $x^2 + y^2 = 1$, limitado superiormente pelo plano de equação $z = 4 - y$ e inferiormente pelo parabolóide definido por $z = 1 - x^2 - y^2$.

   (a) **[2.0 val.]** Utilizando coordenadas cilíndricas, represente o cálculo da massa do sólido S na forma de um integral triplo.

   (b) **[1.0 val.]** Calcule a massa de S.

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

4. Considere a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ e a superfície cónica definida por $\frac{z^2}{3} = x^2 + y^2$. Seja D o domínio correspondente a:

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{z^2}{3} \leq x^2 + y^2 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 5\right\}$$

   (a) **[2.0 val.]** Usando coordenadas esféricas, represente o cálculo do volume de D na forma de um integral triplo.

   (b) **[1.0 val.]** Calcule o volume de D.

5. **[3.0 val.]** Calcule

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{(x+1)^3} dx dy + \int_1^4 \int_{\sqrt{y}-1}^1 e^{(x+1)^3} dx dy$$

Sugestão: Comece por trocar a ordem de integração.

6. **[2.5 val.]** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ tal que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\right)^2\right) > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Sabe-se que $f(x, y) = 0, \forall (x, y) \in fr(A)$, com $a, b > 0$ e

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$$

Mostre que $f(x, y) \leq 0, \forall (x, y) \in A$.