Proposta de Resolução do Segundo Teste de Análise Matemática II E (16/06/2018)

Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução de entre muitas outras possibilidades.

1

Comecemos por determinar os pontos estacionários da função:

$$\nabla f(x,y)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3+4xy^2-4x=0 \\ 4y^3+4x^2y+4y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x(x^2+y^2-1)=0 \\ 4y(y^2+x^2+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 4y=0 \vee \underbrace{y^2+x^2+1=0}_{\text{condição impossível}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x(x^2-1)=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \vee x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases}$$

Logo $(0,0)$, $(1,0)$ e $(-1,0)$ são pontos estacionários.

Sendo f um polinómio, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Utilizemos o teste da Hessiana para classificar cada um dos pontos estacionários encontrados.

$$\text{Hess} f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2+4y^2-4 & 8xy \\ 8xy & 12y^2+4x^2+4 \end{bmatrix}$$

$|\text{Hess} f(0,0)| = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -16 < 0$ logo $(0,0)$ é ponto de sela

$|\text{Hess} f(1,0)| = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 64 > 0$ logo $(1,0)$ é ponto de extremo relativo. Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 8 > 0$, $(1,0)$ é ponto de mínimo relativo.

$|\text{Hess} f(-1,0)| = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 64 > 0$ logo $(-1,0)$ é ponto de extremo relativo. Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) = 8 > 0$, $(-1,0)$ é ponto de mínimo relativo.

2
a) Começamos por verificar as condições necessárias à aplicação do teorema da função implícita.

Seja

$$F(x,y,z) = e^{\operatorname{sen}(x+y)} + \log(x^2+3y+z) - e$$

- $F\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 1-\frac{\pi^2}{16}-\frac{3\pi}{4}\right) = e^{\operatorname{sen}\pi/2} + \log\left(\cancel{\frac{\pi^2}{16}} + \cancel{\frac{3\pi}{4}} + 1 - \cancel{\frac{\pi^2}{16}} - \cancel{\frac{3\pi}{4}}\right) - e =$
$= e + \log 1 - e = 0$

- $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = e^{\operatorname{sen}(x+y)}\cos(x+y) + \frac{1}{x^2+3y+z}\cdot 2x$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = e^{\operatorname{sen}(x+y)}\cos(x+y) + \frac{1}{x^2+3y+z}\cdot 3$

$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+3y+z}$

Atendendo a que $\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{3\pi}{4} + 1 - \frac{\pi^2}{16} - \frac{3\pi}{4} = 1 \neq 0$, à continuidade dos polinómios, das funções seno, cosseno e exponencial e a que a composta, a soma, o produto e o quociente de funções contínuas são contínuas, podemos concluir que todas as derivadas parciais são funções contínuas numa vizinhança de $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 1-\frac{\pi^2}{16}-\frac{3\pi}{4}\right)$ suficientemente pequena.

- $\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 1-\frac{\pi^2}{16}-\frac{3\pi}{4}\right) = e^{\text{sen}\,\pi/2}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi/4}{1} = \frac{\pi}{2} \neq 0$

Pelo Teorema da função implícita existem U e V vizinhanças de $\left(\frac{\pi}{4}, 1-\frac{\pi^2}{16}-\frac{3\pi}{4}\right)$ e $\frac{\pi}{4}$, respectivamente, e $\phi: U \to V$ tal que $\phi \in C^1(U)$ e

$$F(x,y,z)=0 \iff x=\phi(y,z), \quad \forall (x,y,z) \in V \times U$$

b) Pelo Teorema da função implícita sabemos que nas vizinhanças consideradas

$$\frac{\partial x}{\partial y}(y,z) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(y,z) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = -\frac{e^{\text{sen}(x+y)}\cos(x+y) + \frac{3}{x^2+3y+z}}{e^{\text{sen}(x+y)}\cos(x+y) + \frac{2x}{x^2+3y+z}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}(y,z) = \frac{\partial \phi}{\partial z}(y,z) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = -\frac{\frac{1}{x^2+3y+z}}{e^{\text{sen}(x+y)}\cos(x+y) + \frac{2x}{x^2+3y+z}}$$

Assim

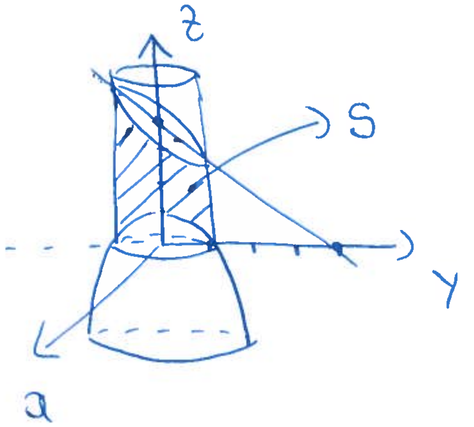
$$\frac{\partial x}{\partial y}(y,z) + (2x-3)\frac{\partial x}{\partial z}(y,z) =$$

$$= \frac{-e^{\text{sen}(x+y)}\cos(x+y) - \cancel{\frac{3}{x^2+3y+z}} - \frac{2x}{x^2+3y+z} + \cancel{\frac{3}{x^2+3y+z}}}{e^{\text{sen}(x+y)}\cos(x+y) + \frac{2x}{x^2+3y+z}} = -1$$

③

a) Sendo S homogéneo sabemos que a sua densidade é constante

$$d(x,y,z) = k \ , \quad \text{com } k \in \mathbb{R}^+$$



$$\text{Massa} = \iiint_S k \, dx\,dy\,dz$$

$$z = 1 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow z = 1 - r^2$$

$$z = 4 - y \Leftrightarrow z = 4 - r \operatorname{sen}\theta$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 1-r^2 \leq z \leq 4 - r\operatorname{sen}\theta \end{array} \qquad |\text{Jac}| = r$$

Assim

$$\text{Massa} = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-r^2}^{4-r\operatorname{sen}\theta} k\,r \; dz\,dr\,d\theta$$

b) Calculemos o integral triplo definido na alínea anterior

$$\text{Massa} = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-r^2}^{4-r\operatorname{sen}\theta} k\,r \; dz\,dr\,d\theta =$$

$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,(4 - r\operatorname{sen}\theta - 1 + r^2)\,dr\,d\theta =$$

$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^1 3r - r^2\operatorname{sen}\theta + r^3 \, dr\,d\theta =$$

$$= k\int_0^{2\pi} \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\,\text{sen}\,\theta + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 d\theta =$$

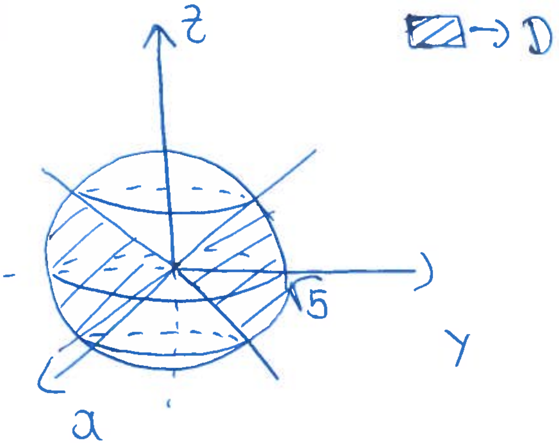
$$= k\int_0^{2\pi} \frac{3}{2} - \frac{1}{3}\,\text{sen}\,\theta + \frac{1}{4}\, d\theta =$$

$$= k\int_0^{2\pi} \frac{7}{4} - \frac{1}{3}\,\text{sen}\,\theta\, d\theta = k\left[\frac{7}{4}\theta + \frac{1}{3}\cos\theta\right]_0^{2\pi} =$$

$$= k\left(\frac{7}{4}2\pi + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7\pi}{2}k$$

4)

a)



$$\text{Volume} = \iiint_D 1\, dx\, dy\, dz$$

$$\begin{cases} x = \rho\,\text{sen}\,\varphi\,\cos\theta & 0 \le \rho \le \sqrt{5} \\ y = \rho\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \\ z = \rho\cos\varphi & \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$|Jac| = \rho^2\,\text{sen}\,\varphi$$

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^2\,\text{sen}^2\varphi - \rho^2\frac{\cos^2\varphi}{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^2\left(\text{sen}^2\varphi - \frac{\cos^2\varphi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho = 0 \vee \text{sen}^2\varphi = \frac{\cos^2\varphi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho = 0 \vee tg^2\varphi = \frac{1}{3} \text{ logo } \varphi = 5\frac{\pi}{6} \vee \varphi = \frac{\pi}{6}$$

Assim

$$\text{Volume} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5}}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \rho^2\,\text{sen}\,\varphi\, d\varphi\, d\rho\, d\theta$$

6)

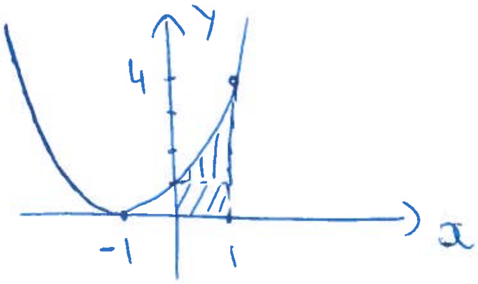
$$\text{Volume} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt5}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \rho^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\rho \, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt5} \left[-\rho^2 \cos\varphi\right]_{\pi/6}^{5\pi/6} d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt5} \rho^2 \frac{\sqrt3}{2} + \rho^2 \frac{\sqrt3}{2} \, d\rho =$$

$$= 2\sqrt3\pi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\sqrt5} = 2\sqrt3\pi \frac{5\sqrt5}{3} = \frac{10}{3}\sqrt{15}\,\pi$$

5



$$x = \sqrt{y} - 1 \iff x+1 = \sqrt{y}$$
$$\Rightarrow (x+1)^2 = y$$

$$\int_0^1\int_0^1 e^{(x+1)^3} \, dx \, dy + \int_1^4\int_{\sqrt{y}-1}^1 e^{(x+1)^3} \, dx \, dy =$$

$$= \int_0^1\int_0^{(x+1)^2} e^{(x+1)^3} \, dy \, dx = \int_0^1 e^{(x+1)^3} (x+1)^2 \, dx =$$

$$= \left[\frac{e^{(x+1)^3}}{3}\right]_0^1 = \frac{e^8}{3} - \frac{e}{3}$$

6

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ logo f é contínua em $\mathbb{R}^2$. Como A é um compacto, o Teorema de Weierstrass garante que f tem um máximo e um mínimo absolutos em A. A condição

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\right)^2\right)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)<0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\right)^2<0\right) \vee$$

$$\vee\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)>0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\right)^2>0\right),$$

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

o que garante que todos os pontos estacionários de f ou não são extremos ou são mínimos relativos.

Assim sendo, o máximo absoluto de f, cuja existência já foi garantida, tem de ocorrer na fronteira de A.

Como f é nula na fronteira de A, podemos concluir que

$$f(x,y)\leq 0,\ \forall (x,y)\in A$$