FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

# Análise Matemática II E

**Repetição do 1º Teste — 7 de Janeiro de 2019**
**(Duração 1:30)**

1. **[2.4 val.]** Determine a família de soluções da equação diferencial ordinária de primeira ordem:

$$ye^{-x^2}\operatorname{sen}(y^2)\frac{dy}{dx} = x^3$$

2. Como consequência de um acidente nuclear, foi libertada na atmosfera uma quantidade indeterminada de um elemento radiactivo, cujo tempo de meia-vida é igual a 250 anos. Trinta anos após o acidente, determinou-se que 20 gramas do elemento permaneciam na atmosfera.

   (a) **[1.0 val.]** Utilize o modelo de decaimento exponencial para representar a situação descrita.

   (b) **[1.0 val.]** Determine a solução do problema de valor inicial definido na alínea anterior.

   (c) **[1.0 val.]** Qual a quantidade do elemento radiactivo que foi libertada na atmosfera na altura do acidente?

3. Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2y}\right)(\cos(x)-1) + \log(x^2 - y - 4x + 5) & \text{, se } (x,y) \neq (0,1) \\ 3 & \text{, se } (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

   (a) **[2.0 val.]** Determine o domínio $D$ de $f$, esboçando uma sua representação gráfica.

   (b) **[1.6 val.]** Indique $int(D)$ e $fr(D)$. O conjunto $D$ é aberto? E fechado? Justifique.

   (c) **[2.0 val.]** Analise a continuidade de $f$.

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

4. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^3}{(x+1)^2 + (y-2)^2} & \text{, se } (x,y) \neq (-1,2) \\ \\ 0 & \text{, se } (x,y) = (-1,2) \end{cases}$$

(a) **[2.0 val.]** Mostre que $g$ não é diferenciável em $(-1,2)$.

(b) **[1.0 val.]** Determine $g'_{(2,1)}(-1,2)$.

5. Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma função de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ cuja matriz jacobiana é dada por

$$Jac\,h(x,y) = \begin{bmatrix} y^2 & 2xy \\ \\ \frac{y}{1+x^2} & \operatorname{arctg}(x) \\ \\ 2xe^{x+y} + x^2e^{x+y} & x^2e^{x+y} \end{bmatrix}.$$

Sabe-se ainda que $h(1,0) = (1,e,0)$. Considere $g : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $g(u,v,w) = \log(vu + \operatorname{arctg}(w^2u))$.

(a) **[1.6 val.]** Justifique que $f = g \circ h$ é diferenciável em $(1,0)$ e calcule $\nabla f(1,0)$.

(b) **[1.4 val.]** Determine uma aproximação linear ao valor de $f(1.01, -0.02)$.

6. **[3.0 val.]** Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se convexa se:

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Supondo que $f$ é diferenciável e convexa em $\mathbb{R}^n$, mostre que

$$\nabla f(x)^\top (y-x) \leq f(y) - f(x) \quad , \forall x,y \in \mathbb{R}^n.$$