Análise Matemática II E

Época de Recurso (7/01/2019)

Repetição do Primeiro teste

Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução de entre muitas outras possibilidades.

①

$$y\, e^{-x^2} \operatorname{sen}(y^2) \frac{dy}{dx} = x^3 \iff$$

$$\iff y \operatorname{sen}(y^2) \frac{dy}{dx} = e^{x^2} x^3 \iff$$

$$\iff \int y \operatorname{sen}(y^2) \frac{dy}{dx}\, dx = \int e^{x^2} x^3\, dx \iff$$

$$\iff \int y \operatorname{sen}(y^2)\, dy = \int x^3 e^{x^2}\, dx \iff$$

$$\iff -\frac{\cos(y^2)}{2} + c_1 = \frac{x^2 e^{x^2}}{2} - \frac{e^{x^2}}{2} + c_2 \quad , c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\iff \cos(y^2) = -x^2 e^{x^2} + e^{x^2} + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{x^2 e^{x^2}}{2} - \int x e^{x^2} dx = \frac{x^2 e^{x^2}}{2} - \frac{e^{x^2}}{2} + c_2 , \ c_2 \in \mathbb{R}$$

$f = x e^{x^2}$ $\quad F = \dfrac{e^{x^2}}{2}$

$g = x^2$ $\quad g' = 2x$

(2) a)

Seja $y(t)$ a quantidade (em gramas) do elemento radioactivo após t anos na atmosfera.

Sabemos que:

$$y'(t) = k\,y(t)$$
$$y(0) = y_0$$
$$y(250) = \frac{y_0}{2}$$
$$y(30) = 20$$

b)

$$y'(t) = k\,y(t) \Leftrightarrow \qquad \mu(t) = e^{\int -k\,dt} = e^{-kt}$$

$$\Leftrightarrow y'(t) - k\,y(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-kt}\,y'(t) - k\,e^{-kt}\,y(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-kt}\,y(t)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-kt}\,y(t) = c_1 \ , \ c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y(t) = c_1\,e^{kt} \ , \ c_1 \in \mathbb{R}$$

$y(0) = y_0 \Leftrightarrow y_0 = c_1$ logo $y(t) = y_0\,e^{kt}$

$y(250) = \frac{y_0}{2} \Leftrightarrow \frac{y_0}{2} = y_0\,e^{250k} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{250k} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 250k = \log(1/2) \Leftrightarrow k = \frac{1}{250}\log(1/2)$

Assim

$$y(t) = y_0\,e^{\frac{1}{250}\log(1/2)\,t}$$

e)

$$y(30)=20 \Leftrightarrow 20 = y_0 \, e^{\frac{1}{250}\log(1/2)30}$$

$$\Leftrightarrow y_0 = \frac{20}{e^{\frac{1}{25\cancel{0}}\log(1/2)3\cancel{0}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_0 = 20 \, e^{\frac{3}{25}\log 2} \text{ gramas}$$

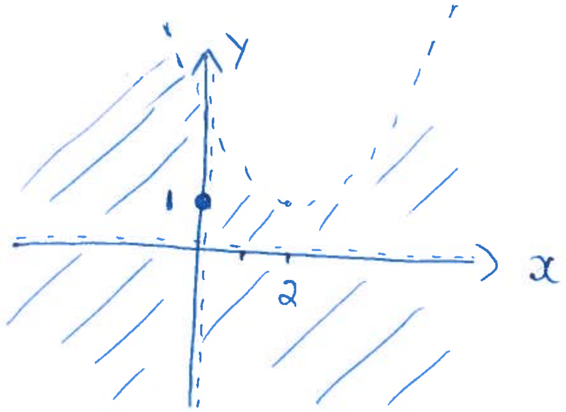
3

a)

$$D = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\} : x^2y \neq 0 \wedge x\neq 0 \wedge x^2-y-4x+5>0\}$$
$$\cup \{(0,1)\}$$

$$x^2y\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0 \wedge y\neq 0$$

$$x^2-y-4x+5>0 \Leftrightarrow (x-2)^2-y+1>0 \Leftrightarrow (x-2)^2+1>y$$



b) $int(D) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0 \wedge y\neq 0 \wedge x^2-y-4x+5>0\}$

$fr(D) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0 \vee (x=0 \wedge x^2-y-4x+5>0) \vee x^2-y-4x+5=0\}$

D não é aberto pois $(0,1)\in D$ mas $(0,1)\notin int(D)$

D não é fechado pois $(0,0)\in fr(D)$ mas $(0,0)\notin D$

e)

Seja $(x,y) \in D$ mas $(x,y) \neq (0,1)$.

f é contínua em (x,y) pois f resulta da soma, produto, quociente e compostas de funções contínuas (seno, cosseno, polinómios e logaritmo)

Para $(x,y) = (0,1)$, f é contínua se e só se existir

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y).$$

Determinemos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\(x,y)\neq(0,1)}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\(x,y)\neq(0,1)}} \frac{1}{x}\,\text{sen}\left(\frac{1}{x^2y}\right)(\cos x - 1) + \log(x^2 - y - 4x + 5)$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\(x,y)\neq(0,1)}} \frac{\cos x - 1}{x}\,\text{sen}\left(\frac{1}{x^2y}\right) + \log(x^2 - y - 4x + 5) =$$

$= 0 + \log 4 = \log 4$ pois $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ e

$\text{sen}\left(\frac{1}{x^2y}\right)$ é limitada entre -1 e 1 pelo que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\(x,y)\neq(0,1)}} \frac{\cos x - 1}{x}\,\text{sen}\left(\frac{1}{x^2y}\right) = 0$$

Como $f(0,1) = 3$ concluímos que $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$ não existe, pelo que f não é contínua em $(0,1)$.

4

a) g é diferenciável em $(-1,2)$ se e só se

$$g(-1+h_1, 2+h_2) = g(-1,2) + dg(-1,2)(h_1,h_2) + \|(h_1,h_2)\| \varepsilon(h_1,h_2)$$

com $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(-1,2) = \lim_{h\to 0} \frac{g(-1+h,2) - g(-1,2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(-1,2) = \lim_{h\to 0} \frac{g(-1,2+h) - g(-1,2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Assim

$dg(-1,2)(h_1,h_2) = h_1$, pelo que

$$\varepsilon(h_1,h_2) = \frac{g(-1+h_1, 2+h_2) - h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{h_1^3}{h_1^2+h_2^2} - h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{-h_1 h_2^2}{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)^3} =$$

$$\begin{cases} a = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$\rho > 0$

$\theta \in [0, 2\pi[$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{-\cancel{\rho^3}\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta}{\cancel{\rho^3}} = -\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta,$$

pelo que o limite não existe pois valores de θ distintos conduzem a valores distintos

Assim, g não é diferenciável em $(-1,2)$.

b)

$$g'_{(2,1)}(-1,2) = \lim_{t\to 0} \frac{g((-1,2)+t(2,1)) - g(-1,2)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{g(-1+2t, 2+t) - g(-1,2)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{8t^3}{4t^2+t^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{8}{5} = \frac{8}{5}$$

5

a) $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$ logo h é diferenciável em $(1,0)$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v,w) = \frac{1}{vu + \operatorname{arctg}(w^2 u)} \cdot \left(v + \frac{1}{1+w^4u^2} w^2 \right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v,w) = \frac{1}{vu + \operatorname{arctg}(w^2 u)} \cdot u$$

$$\frac{\partial g}{\partial w}(u,v,w) = \frac{1}{vu + \operatorname{arctg}(w^2 u)} \cdot \frac{1}{1+w^4u^2} \cdot 2wu$$

$\frac{\partial g}{\partial u}$, $\frac{\partial g}{\partial v}$ e $\frac{\partial g}{\partial w}$ são funções contínuas numa vizinhança de $(1,e,0)$ dado que $e \times 1 + \operatorname{arctg}(0^2 . 1) = e \neq 0$ e $1 + 0^4 . 1^2 = 1 \neq 0$

Assim g é de classe C^1 numa vizinhança de $(1,e,0)$ pelo que g é diferenciável em $(1,e,0)$.

Como a composta de funções diferenciáveis é diferenciável temos que f é diferenciável em $(1,0)$ e

$$Jac\, f(1,0) = Jac\, g(1,e,0) \times Jac\, h(1,0)$$

Donde

$$\nabla f(1,0)^T = \operatorname{Jac} f(1,0) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{e} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pi/4 \\ 3e & e \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi}{4e} \end{bmatrix}$$

b)

$$f(1.01, -0.02) \simeq f(1,0) + df(1,0)(0.01, -0.02) =$$

$$= g(1,e,0) + \begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi}{4e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \end{bmatrix} =$$

$$= \log e - \frac{\pi}{4e} 0.02 = 1 - \frac{\pi}{4e} 0.02$$

6) Sendo f diferenciável em $\mathbb{R}^n$ sabemos que

$$\nabla f(x)^T (y-x) = df(x)(y-x) = f'_{y-x}(x)$$

Em particular,

$$\nabla f(x)^T (y-x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{f(ty + (1-t)x) - f(x)}{t} \leq$$

$$\leq \lim_{t \to 0^+} \frac{t f(y) + (1-t) f(x) - f(x)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{t f(y) - t f(x)}{t} = \lim_{t \to 0^+} f(y) - f(x) =$$

$$= f(y) - f(x)$$

Logo

$$\nabla f(x)^T (y - x) \leq f(y) - f(x)$$