FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática II E – 1º Semestre 2018/19

Repetição do 2º Teste — 7 de Janeiro de 2019
(Duração 1:30)

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por $f(x,y) = (e^x \cos(y), e^x \mathrm{sen}(y))$.

   (a) **[2.0 val.]** Mostre que f é invertível numa vizinhança de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Justifique detalhadamente a sua resposta.

   (b) **[1.0 val.]** Seja $f(x,y) = (u,v)$. Determine a matriz jacobiana de f^{-1} no ponto (u,v).

   (c) **[1.0 val.]** Será f globalmente invertível em $\mathbb{R}^2$? Justifique detalhadamente a sua resposta.

2. **[3.4 val.]** Considere a lâmina $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3 \ \wedge \ x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0\}$, cuja densidade em cada ponto (x,y) é dada pelo valor da função $d(x,y) = 1 + xy^2$. Determine os pontos correspondentes às densidades máxima e mínima da lâmina.

3. Considere a seguinte soma de integrais:

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy \, dydx + \int_{1}^{\sqrt{2}} \int_{0}^{x} xy \, dydx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xy \, dydx$$

   (a) **[1.6 val.]** Utilizando coordenadas polares, exprima a soma anterior na forma de um único integral duplo.

   (b) **[1.0 val.]** Calcule o valor do integral.

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

4. Considere o semi-cone de equação $z = 3 + \sqrt{x^2 + y^2}$ e seja S_1 o sólido definido por:

$$S_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \ \wedge \ 0 \leq x \leq y \ \wedge \ 0 \leq z \leq 3 + \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

Assuma que em cada ponto $(x, y, z) \in S_1$ a densidade do sólido é dada por $d(x, y, z) = e^{\frac{z}{3}}$.

(a) **[2.0 val.]** Recorrendo a coordenadas cilíndricas, represente o cálculo da massa do sólido S_1 na forma de um único integral triplo.

(b) **[1.6 val.]** Calcule a massa de S_1.

5. Considere a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e seja S_2 o sólido correspondente a:

$$S_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \wedge x^2 + y^2 \geq 4 \right\}.$$

(a) **[2.0 val.]** Usando coordenadas esféricas, represente o cálculo do volume de S_2 na forma de um único integral triplo.

(b) **[1.4 val.]** Calcule o volume de S_2.

6. **[3.0 val.]** Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2(D)$ tal que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \neq 0, \forall (x, y) \in int(D).$$

Sabendo que D é um conjunto compacto, mostre que não existe uma função que satisfaça as condições anteriores e $f(x, y) = -5, \forall (x, y) \in fr(D)$.

Sugestão: Comece por mostrar que $f(x, y) = -5, \forall (x, y) \in D$.