Análise Matemática II E

Época de Recurso (7/01/2019)

Repetição do Segundo teste

Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução de entre muitas outras possibilidades.

1

a) Começamos por verificar as condições necessárias à aplicação do teorema da função inversa.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -e^x \operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = e^x \cos y$$

funções contínuas em $\mathbb{R}^2$, logo $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ pelo que f é de classe C^1 numa vizinhança de qualquer ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$|\operatorname{Jac} f(x,y)| = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x}\cos^2 y + e^{2x}\operatorname{sen}^2 y = e^{2x} \neq 0, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Assim, o teorema da função inversa garante que f é uma bijecção na vizinhança de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ considerada pelo que será localmente invertível.

b) Ainda como resultado do teorema da função inversa, considerando $f(x,y)=(u,v)$, temos que:

$$Jac\, f^{-1}(u,v) = inv(Jac\, f(x,y)) =$$

$$= \frac{1}{e^{2x}} \begin{bmatrix} e^{x}\cos y & e^{x}\operatorname{sen} y \\ -e^{x}\operatorname{sen} y & e^{x}\cos y \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\cos y}{e^{x}} & \frac{\operatorname{sen} y}{e^{x}} \\ -\frac{\operatorname{sen} y}{e^{x}} & \frac{\cos y}{e^{x}} \end{bmatrix}$$

e)

$f(1,0) = (e,0) = f(1,2\pi)$ mas $(1,0) \neq (1,2\pi)$

logo f não é injectiva, pelo que não é globalmente invertível em $\mathbb{R}^2$.

2) Pretendemos $\min/\max\ 1+xy^2 = d(x,y)$

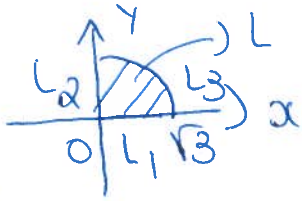
$\quad$ s.a $\quad (x,y)\in L$

Comecemos por determinar os pontos estacionários de d que pertencem a L.

$$\nabla d(x,y)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=0 \\ 2xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

Assim $(x,0)$, $x\in[0,\sqrt{3}]$ são pontos estacionários de d no domínio considerado, logo candidatos a extremos absolutos da função, que existem dado que d é uma função contínua e L é um conjunto compacto (teorema de Weierstrass).

Analisemos agora o comportamento da função na fronteira de L, que é constituída por três linhas (L_1, L_2 e L_3)



Já vimos anteriormente que todos os pontos de L_1 são candidatos a extremos.

Os pontos de L_2 são da forma $(0,y)$ com $y \in [0,\sqrt{3}]$

Assim $d(x,y) = 1$, $\forall (x,y) \in L_2$ pelo que todos os pontos de L_2 são também candidatos a extremos.

Para analisar L_3, consideremos a função Lagrangeana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 1 + xy^2 - \lambda(x^2+y^2-3)$$

e determinemos os seus pontos estacionários.

$$\nabla \mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2\lambda x = 0 \\ 2xy - 2\lambda y = 0 \\ -(x^2+y^2-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 2y(x-\lambda) = 0 \\ x^2+y^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y = 0 \vee x = \lambda \\ \text{---} \end{cases}$$

Se $y = 0$ então $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \cancel{\pm}\sqrt{3}$ pois $x \geq 0$ mas o ponto $(\sqrt{3}, 0)$ já havia sido considerado como candidato a extremo.

Se $x = \lambda$ então $y^2 = 2\lambda^2$ logo $\lambda^2 + 2\lambda^2 = 3 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lambda = \pm 1$

Se $\lambda = -1$ então $x = -1$ o que não é aceitável pois $x \geq 0$

Se $\lambda = 1$ então $x = 1$ e $y = \pm\sqrt{2}$ (pois $y \geq 0$)

Como temos a garantia que existem extremos absolutos da função no domínio considerado, basta avaliar a função nos pontos candidatos a extremos absolutos para os determinar. Assim:

$d(x,0) = 1$, $\forall x \in [0, \sqrt{3}]$

$d(0,y) = 1$, $\forall y \in [0, \sqrt{3}]$

$d(1, \sqrt{2}) = 1 + 2 = 3$

Logo $(1, \sqrt{2})$ é o ponto de máximo da lâmina e

$(x, 0)$, $x \in [0, \sqrt{3}]$ e $(0, y)$, $y \in [0, \sqrt{3}]$ são pontos de

mínimo da lâmina.

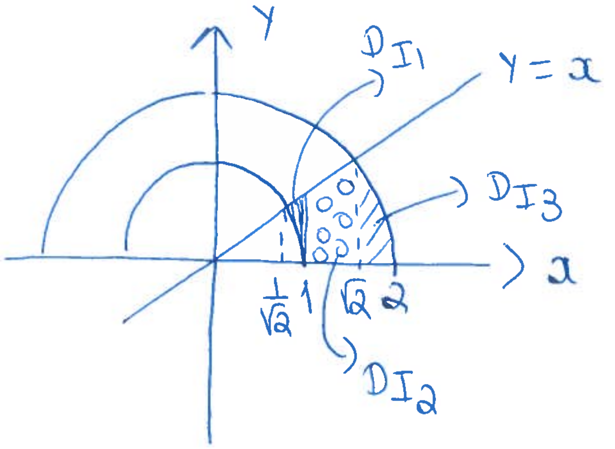
(3)

a) b) Seja $I_1 = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy \, dy \, dx$,

$$I_2 = \int_{1}^{\sqrt{2}} \int_{0}^{x} xy \, dy \, dx,$$

$$I_3 = \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xy \, dy \, dx$$

Então



$\sqrt{1-x^2} = y \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$

$\sqrt{4-x^2} = y \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 - x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=4$

$$\begin{cases} \sqrt{1-x^2} = y \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x^2=1 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=1 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{4-x^2} = y \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x^2=4 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=2 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ - \end{cases}$$

Assim

$$I_1 + I_2 + I_3 = \iint_{DI_1} xy \, dy \, dx + \iint_{DI_2} xy \, dy \, dx + \iint_{DI_3} xy \, dy \, dx =$$

$$= \int_1^2 \int_0^{\pi/4} \rho^3 \cos\theta \, \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\rho =$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta & 1 \leq \rho \leq 2 \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta & 0 \leq \theta \leq \pi/4 \end{cases}$$

$$|J| = \rho$$

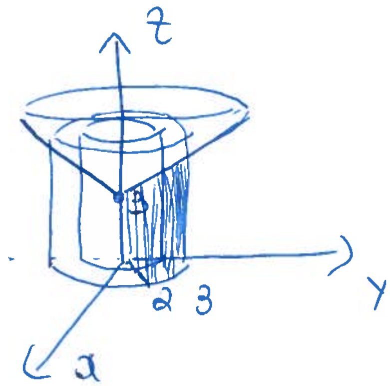
$$= \int_1^2 \left[\rho^3 \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2} \right]_0^{\pi/4} d\rho =$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{4} \rho^3 \, d\rho = \left[\frac{\rho^4}{16} \right]_1^2 =$$

$$= \frac{16}{16} - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

(4)

a)



$$z = 3 + \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow z - 3 = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow (z-3)^2 = x^2+y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-(z-3)^2 = 0$$

$$\text{Massa} = \iiint_{S_1} e^{z/3} \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_2^3 \int_0^{3+r} e^{z/3} \, r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & 2 \leq r \leq 3 \\ y = r\operatorname{sen}\theta & \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ z = z & 0 \leq z \leq 3 + r \end{cases}$$

$$|J| = r$$

b)

$$\text{Massa} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{2}^{3} \int_{0}^{3+r} e^{z/3} \, r \, dz \, dr \, d\theta =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{2}^{3} \Big[3 e^{z/3} r \Big]_{0}^{3+r} dr \, d\theta =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{2}^{3} 3r \, e^{1+r/3} - 3r \, dr \, d\theta =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \Big[9r \, e^{1+r/3} - 27 e^{1+r/3} - \frac{3}{2} r^2 \Big]_{2}^{3} d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(\cancel{27 e^{2}} - \cancel{27 e^{2}} - \frac{27}{2} - 18 e^{5/3} + 27 e^{5/3} + \frac{12}{2} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(9 e^{5/3} - \frac{15}{2} \right)$$

$$\int 3r \, e^{1+r/3} \, dr = 9r \, e^{1+r/3} - \int 9 e^{1+r/3} \, dr =$$

$f = e^{1+r/3}$ $\quad F = 3e^{1+r/3}$

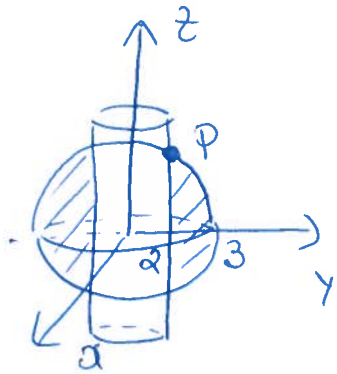
$g = 3r$ $\quad g' = 3$

$$= 9r \, e^{1+r/3} - 27 e^{1+r/3} + c, \; c \in \mathbb{R}$$

(5)

a)

$$\text{volume} = \iiint_{S_2} 1\, dx\, dy\, dz$$



$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+z^2=9 \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2=5 \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\pm\sqrt{5} \\ \text{—} \end{cases}$$

Considerando o ponto P, sabemos que $\rho = 3$ e $z = \sqrt{5}$, pelo que $z = \rho\cos\varphi \Leftrightarrow \sqrt{5} = 3\cos\varphi \Leftrightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

Temos ainda que

$$x^2+y^2=4 \Leftrightarrow \rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi = 4 \Leftrightarrow \rho^2 = \frac{4}{\operatorname{sen}^2\varphi} \Leftrightarrow \rho = \frac{2}{\operatorname{sen}\varphi}$$ pois $\rho > 0$ e $\operatorname{sen}\varphi > 0$

Pelo que

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \frac{2}{\operatorname{sen}\varphi} \leq \rho \leq 3 \\ \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \leq \varphi \leq \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \end{array} \qquad |J| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$$

Então

$$\text{volume} = \int_0^{2\pi} \int_{\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)}^{\pi - \arccos(\sqrt{5}/3)} \int_{\frac{2}{\operatorname{sen}\varphi}}^{3} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

b)

$$\text{volume} = \int_0^{2\pi}\int_{\arccos(\sqrt{5}/3)}^{\pi-\arccos(\sqrt{5}/3)} \left[\frac{\rho^3}{3}\operatorname{sen}\varphi\right]_{\frac{2}{\operatorname{sen}\varphi}}^{3} d\varphi\, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_{\arccos(\sqrt{5}/3)}^{\pi-\arccos(\sqrt{5}/3)} 9\operatorname{sen}\varphi - \frac{8}{3}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2\pi\left[-9\cos\varphi + \frac{8}{3}\operatorname{cotg}\varphi\right]_{\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)}^{\pi-\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)} =$$

$$= 2\pi\left(9\frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{8}{3}\frac{\sqrt{5}}{2} + 9\frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{8}{3}\frac{\sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$= 2\pi\left(6\sqrt{5} - \frac{8}{3}\sqrt{5}\right) = 2\pi\left(\frac{10\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{20}{3}\sqrt{5}\,\pi$$

$$\operatorname{cotg}\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right) = \frac{\cos\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right)}{\operatorname{sen}\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right)} = \frac{\sqrt{5}/3}{2/3} = \sqrt{5}/2$$

$$\operatorname{sen}^2\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right) + \cos^2\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right) = \cancel{\pm}\frac{2}{3}$$

(6)

f é contínua em D e D é um conjunto compacto

logo, pelo teorema de Weierstrass, f tem

um máximo e um mínimo absolutos em D.

Seja $(x,y) \in int(D)$

$$|Hess\, f(x,y)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2$$

(T. de Shwarz
pois $f \in C^2(D)$)

$$= -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 < 0 \text{ pois}$$

(pois $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \neq 0 \;, \forall (x,y) \in int(D)$

Assim f não tem extremos em $int(D)$ pelo que o máximo e o mínimos absolutos são atingidos em $fr(D)$. Como $\forall (x,y) \in fr(D)$, $f(x,y) = -5$ temos

que $\forall (x,y) \in D$, $f(x,y) = -5$

Como tal, sendo f constante em D, teríamos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \quad , \forall (x,y) \in \operatorname{int}(D)$$

o que contraria as condições inicialmente dadas.