FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática II E

1º Teste — 5 de Novembro de 2018
(Duração 1:30)

1. **[2.5 val.]** Determine a família de soluções da equação diferencial ordinária de primeira ordem para $x \in \mathbb{R}^+$:
$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x + e^{x^2}$$

2. Um bolo foi retirado de um forno a uma temperatura de $200°C$. Sabe-se que a temperatura da cozinha é de $22°C$ e que, após os primeiros 5 minutos, a temperatura do bolo desceu $20°C$.
   (a) **[1.0 val.]** Utilize o modelo de variação da temperatura de Newton para representar a situação descrita na forma de um problema de valor inicial.
   (b) **[1.0 val.]** Determine a solução do problema de valor inicial definido na alínea anterior.
   (c) **[1.0 val.]** Sabendo que o bolo pode ser comido quando atingir $30°C$, quanto tempo será necessário esperar?

3. Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:
$$f(x,y) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{y^2}{x}\right) \frac{e^{\frac{x}{y}-2} - 1}{x - 2y}$$
   (a) **[2.0 val.]** Determine o conjunto D, domínio de f, esboçando uma sua representação gráfica.
   (b) **[1.5 val.]** Indique $int(D)$ e $fr(D)$. O conjunto D é aberto? E fechado? Justifique.
   (c) **[2.0 val.]** Mostre que é possível prolongar f por continuidade ao ponto $(4,2)$. Defina a respectiva função prolongamento.

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

4. Seja $g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{xy + 3(x^2+y^2)} & \text{, se } (x,y) \in D \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{, se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) **[2.5 val.]** Mostre que g é diferenciável em $(0,0)$.

(b) **[1.5 val.]** Considere uma função $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ da qual se sabe que $\nabla h(0,0) = [-3 \ \ 2]^\top$ e $h(0,0) = 5$. Justifique que $g+h$ é diferenciável em $(0,0)$ e utilize essa informação para determinar uma aproximação linear ao valor de $(g+h)(0.01, -0.02)$.

5. **[2.0 val.]** Sejam f e g funções definidas num aberto A de $\mathbb{R}^2$. Suponha que $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \text{ e que } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

para todo o $(x,y) \in A$. Mostre que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y), \forall (x,y) \in A$$

6. Sejam $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida por $z = f(x,y)$. Considere a mudança de variável $x = \sqrt{s}$ e $y = \frac{t}{s}$.

(a) **[1.5 val.]** Determine $\frac{\partial f}{\partial s}$ e $\frac{\partial f}{\partial t}$.

(b) **[1.5 val.]** Sabendo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1, \forall (x,y) \in A$$

determine $f'_{(2,-1)}(4,-6)$.