Análise Matemática II E

Primeiro teste (5/11/2018)

Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução de entre muitas outras possibilidades.

1 Consideremos $x \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = e^x + e^{x^2}$$ é uma equação diferencial ordinária linear.

Calculemos o factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\log|x|} = |x| = x, \text{ pois } x \in \mathbb{R}^+$$

Assim

$$x \frac{dy}{dx} + y = xe^x + e^{x^2} x$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(xy) = xe^x + e^{x^2} x$$

$$\Leftrightarrow xy = \int xe^x + e^{x^2} x \, dx$$

$$\Leftrightarrow xy = xe^x - \int e^x dx + \frac{1}{2} e^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow y = e^x - \frac{e^x}{x} + \frac{1}{2x} e^{x^2} + \frac{c}{x}, \text{ com } c \in \mathbb{R}$$

(pois $x \in \mathbb{R}^+$)

2

2

a) Seja $y(t)$ a temperatura, em graus centígrados, do bolo no instante t (em minutos)

Recorrendo ao modelo de variação da temperatura de Newton sabemos que

$$\begin{cases} y'(t) = k\left(y(t) - 22\right) \\ y(0) = 200 \\ y(5) = 180 \end{cases}$$

b)

$$y' = ky - 22k \Leftrightarrow \qquad \mu(t) = e^{\int -k\,dt} = e^{-kt}$$

$$\Leftrightarrow y' - ky = -22k$$

$$\Leftrightarrow e^{-kt} y' - k e^{-kt} y = -22k e^{-kt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-kt} y\right) = -22k e^{-kt}$$

$$\Leftrightarrow e^{-kt} y = \int -22k e^{-kt}\,dt$$

$$\Leftrightarrow e^{-kt} y = 22 e^{-kt} + c \ , \ c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y = 22 + c e^{kt} \ , \ c \in \mathbb{R}$$

Como $y(0) = 200$ temos

$$200 = 22 + c \Leftrightarrow c = 178$$

Logo

$$y = 22 + 178\, e^{-kt}$$

Como $y(5) = 180$ vem

$$180 = 22 + 178\, e^{-5k}$$

$$\Leftrightarrow 158 = 178\, e^{-5k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{158}{178} = e^{-5k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{1}{5} \log\left(\frac{158}{178}\right)$$

Assim, a solução do problema é

$$y = 22 + 178\, e^{\frac{1}{5} \log\left(\frac{158}{178}\right) t}$$

e)

$$30 = y(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30 = 22 + 178\, e^{1/5 \log\left(\frac{158}{178}\right) t}$$

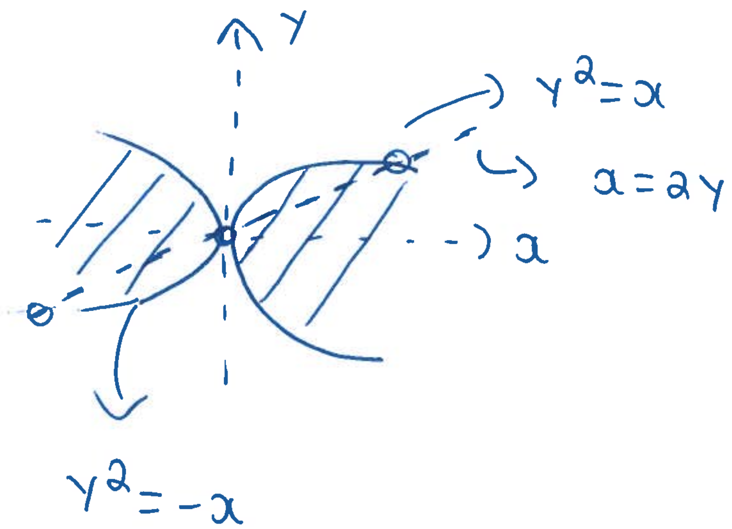
$$\Leftrightarrow \frac{8}{178} = e^{1/5 \log\left(\frac{158}{178}\right) t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \log\left(\frac{158}{178}\right) t = \log\left(\frac{8}{178}\right) \Leftrightarrow t = \frac{5 \log\left(\frac{8}{178}\right)}{\log\left(\frac{158}{178}\right)} \text{ minutos}$$

3

a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \frac{y^2}{x} \leq 1 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x - 2y \neq 0\}$

$-1 \leq \frac{y^2}{x} \leq 1 \iff (-x \leq y^2 \leq x \wedge x > 0) \vee (-x \geq y^2 \geq x \wedge x <$



b) $\operatorname{int}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < \frac{y^2}{x} < 1 \wedge y \neq 0 \wedge x - 2y \neq 0\}$

$\operatorname{fr}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2 \vee x = -y^2 \vee y = 0$

$\vee \left(x = 2y \wedge -1 \leq \frac{y^2}{x} \leq 1\right)\}$

D não é aberto pois $D \neq \operatorname{int}(D)$. Por exemplo $(1,1) \in D$ mas $(1,1) \notin \operatorname{int}(D)$

D não é fechado pois $D \neq \overline{D}$. Por exemplo $(0,0) \notin D$ mas $(0,0) \in \operatorname{fr}(D) \subseteq \overline{D}$

e) f é prolongável por continuidade ao ponto $(4,2)$ se e só se existir $\lim_{(x,y)\to(4,2)} f(x,y)$. Calculemos este limite

$$\lim_{(x,y)\to(4,2)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(4,2)} \arcsin\left(\frac{y^2}{x}\right) \frac{e^{\frac{x}{y}-2}-1}{x-2y} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(4,2)} \arcsin\left(\frac{y^2}{x}\right) \frac{e^{\frac{x}{y}-2}-1}{\frac{x}{y}-2} \frac{1}{y}$$

$$\underset{*}{=} \arcsin(1) \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

* Pois $\lim_{\omega\to 0} \frac{e^{\omega}-1}{\omega} = 1$ e quando $(x,y)\to(4,2)$ temos $\frac{x}{y}-2 \to 0$

A função prolongamento será definida por

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{y^2}{x}\right) \dfrac{e^{\frac{x}{y}-2}-1}{x-2y}, & \text{se } (x,y)\in D \\ \dfrac{\pi}{4}, & \text{se } (x,y)=(4,2) \end{cases}$$

(4)

a)

g é diferenciável em (0,0) se e só se

$$g(h_1,h_2) = g(0,0) + dg(0,0)(h_1,h_2) + \|(h_1,h_2)\|\,\varepsilon(h_1,h_2),$$

$$\text{com } \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{3h^2} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0,h)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{3h^2} - 0}{h} = 0$$

Se g for diferenciável em (0,0) então

$$dg(0,0)(h_1,h_2) = 0 \times h_1 + 0 \times h_2 = 0$$

Assim

$g(h_1,h_2) = 0 + 0 + \|(h_1,h_2)\|\,\varepsilon(h_1,h_2)$ pelo que

$$\varepsilon(h_1,h_2) = \frac{g(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{h_1^2 h_2^2}{h_1 h_2 + 3(h_1^2+h_2^2)}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

Considerando as coordenadas polares

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \,\text{sen}\,\theta \end{cases} , \quad (\rho, \theta) \in A$$

$$A = \{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[: (\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta) \in D \}$$

temos

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1, h_2) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos^2\theta\, \rho^2 \text{sen}^2\theta}{(\rho\cos\theta\, \rho\,\text{sen}\,\theta + 3\rho^2)\rho}$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \rho \, \frac{\cos^2\theta\, \text{sen}^2\theta}{\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + 3} = 0 \quad \text{pois}$$

$\lim_{\rho\to 0} \rho = 0$ e $0 \leq \cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta \leq 1$ e $2 \leq \cos\theta\,\text{sen}\,\theta + 3 \leq 4$

pelo que $0 \leq \dfrac{\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta}{\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + 3} \leq \dfrac{1}{2}$ sendo assim uma função limitada.

$\therefore$ g é diferenciável em $(0,0)$

b)

8

$h \in C^1(\mathbb{R}^2)$ logo h é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, sendo em particular diferenciável em $(0,0)$

Pela alínea anterior, g é diferenciável em $(0,0)$

A soma de funções diferenciáveis é diferenciável, logo $g+h$ é diferenciável em $(0,0)$ e

$$d(g+h) = dg + dh$$

Assim

$$(g+h)(0.01,-0.02) \simeq (g+h)(0,0) + d(g+h)(0,0)(0.01,-0.02)$$

$$= g(0,0) + h(0,0) + dg(0,0)(0.01,-0.02) + dh(0,0)(0.01,-0.02)$$

$$= 0 + 5 + 0 + \begin{bmatrix} -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \end{bmatrix} =$$

$$= 5 - 0.03 - 0.04 = 4.93$$

5

Seja $(x,y) \in A$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) =$$

$$= -\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) =$$

$$= -\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) \text{ , pois } g \in C^2(\mathbb{R}^2)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

$$= -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

(6) (10)

a) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{tikzcd}
(s,t) \arrow[r, "\theta"'] \arrow[rr, bend right, "f\circ\theta"'] & (x,y) \arrow[r, "f"'] & z
\end{tikzcd}$$

$$Jac(f\circ\theta)(s,t) = Jac\, f(x,y) \times Jac\,\theta(s,t)$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right] \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{s}} & 0 \\ -\frac{t}{s^2} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{1}{2\sqrt{s}} - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{t}{s^2} \qquad \frac{1}{s}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial s}(s,t) \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\right]$$

b) Sendo f e θ diferenciáveis nos respectivos domínios, sabemos que a sua composição também vai ser diferenciável no domínio de validade da composição. Assim

$$f'_{(2,-1)}(4,-6) = df(4,-6)(2,-1) =$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(2,-3/2)\frac{1}{4} + \frac{\partial f}{\partial y}(2,-3/2)\frac{6}{16} \qquad \frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial y}(2,-\tfrac{3}{2})\right]$$

$$\times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} \left(2, -\frac{3}{2}\right) + \frac{12}{16} \frac{\partial f}{\partial y} \left(2 - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{4} \frac{\partial f}{\partial y} \left(2, -\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} \left(2, -\frac{3}{2}\right) + \frac{8}{16} \frac{\partial f}{\partial y} \left(2, -\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \left(2, -\frac{3}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left(2, -\frac{3}{2}\right) \right) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$