Análise Matemática II E

Segundo Teste (17/12/2018)

Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução de entre muitas outras possibilidades.

①

a) Seja $f(x,y,z) = e^{zy}\,\text{sen}(xy) + \cos(y^2) + zx + 1$.

Começamos por verificar as condições necessárias à aplicação do teorema da função implícita.

① $f(-1,0,2) = e^{2\times 0}\,\text{sen}(-1\times 0) + \cos(0^2) + 2(-1) + 1 =$

$= 0 + 1 - 2 + 1 = 0$

②

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^{zy}\cos(xy)\,y + z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = e^{zy}\,z\,\text{sen}(xy) + e^{zy}\cos(xy)\,x - \text{sen}(y^2)\,2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = e^{zy}\,y\,\text{sen}(xy) + x$$

Todas as derivadas parciais são funções contínuas em $\mathbb{R}^3$ pois resultam da soma, produto e compostas de funções contínuas (seno, cosseno, exponencial e polinómios). Assim $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Em particular,

f é de classe C^1 numa vizinhança de $(-1,0,2)$.

(3)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,0,2) = 0 + 1\times 1\times(-1) - 0 = -1 \neq 0$$

Logo, pelo teorema da função implícita existem vizinhanças U de $(-1,2)$ e V de 0 e existe $\phi : U \to V$ tal que $\phi \in C^1(U)$ e

$$f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x,z) \quad , \forall y \in V, \forall (x,z) \in U$$

b) Pela alínea anterior, como resultado da aplicação do teorema da função implícita, sabemos que $\phi \in C^1(U)$, sendo U uma vizinhança de $(-1,2)$. Em particular, ϕ é diferenciável em $(-1,2)$.

Uma aproximação linear a $\phi(-0.09, 1.98)$ são dada por:

$$\phi(-0.09, 1.98) = \phi(-1+0.91, 2-0.02) \simeq$$

$$\simeq \phi(-1,2) + \nabla\phi(-1,2)^T \begin{bmatrix} 0.91 \\ -0.02 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(*)}{=} 0 + [2 \ -1] \begin{bmatrix} 0.91 \\ -0.02 \end{bmatrix} = 1.82 + 0.02$$

$$= 1.84$$

(*)

Ainda pelo teorema da função implícita sabemos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(-1,2) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(-1,0,2)}{\frac{\partial f}{\partial y}(-1,0,2)} = 2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(-1,2) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial z}(-1,0,2)}{\frac{\partial f}{\partial y}(-1,0,2)} = -1$$

2 Pretendemos

$$\begin{array}{ll} \max / \min : & x^2+2y^2-x+3 \\ \text{s.a} & x^2+y^2 \leq 1 \end{array}$$

Comecemos por determinar os pontos estacionários de

$$f(x,y) = x^2+2y^2-x+3$$

que pertençam a L.

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ 4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}$$

$(\frac{1}{2},0)$ é ponto estacionário de f e pertence a L.

Analisemos agora a fronteira de L, determinando os pontos estacionários da função Lagrangeana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + 2y^2 - x + 3 - \lambda(x^2+y^2-1) \quad , \text{com } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\nabla \mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 - 2\lambda x = 0 \\ 4y - 2\lambda y = 0 \\ -(x^2+y^2-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ y(4-2\lambda) = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ y = 0 \lor \lambda = 2 \\ - \end{cases}$$

Se $y = 0$

$$\begin{cases} - \\ - \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Se $\lambda = 2$

$$\begin{cases} 2x - 1 - 4x = 0 \\ - \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 1 \\ - \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/2 \\ - \\ y^2 = 1 - \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/2 \\ - \\ y^2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/2 \\ - \\ y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Assim, $(1,0)$, $(-1,0)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ são pontos estacionários da função Lagrangeana.

L é um conjunto compacto (fechado e limitado). f é uma função contínua em L, pois é um polinómio.

Pelo teorema de Weierstrass, f tem um máximo e um mínimo absolutos em L. Os pontos candidatos a pontos de extremo absoluto são os pontos estacionários determinados (para a função e para a função Lagrangeana).

Como:

$f(\frac{1}{2},0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3 = 3 - \frac{1}{4}$

$f(1,0) = 1 - 1 + 3 = 3$

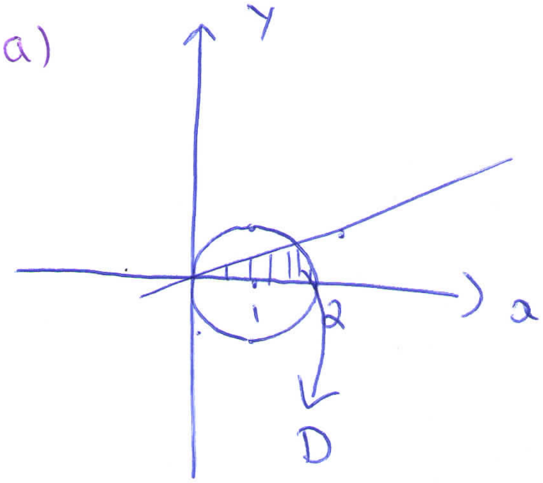
$f(-1,0) = 1 + 1 + 3 = 5 = 3 + \frac{8}{4}$

$f(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}) = f(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{6}{4} + \frac{1}{2} + 3 = 3 + \frac{9}{4}$

podemos concluir que a densidade mínima da lâmina ocorre em $(\frac{1}{2},0)$ e a densidade máxima da lâmina ocorre em $(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ e em $(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

(3)

a)



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta & 0 \le \theta \le \operatorname{arctg}(1/2) \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta & 0 \le \rho \le 2\cos\theta \end{cases}$$

$$|J| = \rho$$

$$y = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \rho\operatorname{sen}\theta = \frac{\rho\cos\theta}{2}$$

$$\underset{\rho\neq 0}{\Leftrightarrow} \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \operatorname{arctg}(1/2)$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 - 2\rho\cos\theta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underset{\rho\neq 0}{\Leftrightarrow} \rho - 2\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \rho = 2\cos\theta$$

b)

$$\text{Área} = \iint_D 1 \, dx\,dy = \int_0^{\operatorname{arctg}(1/2)} \int_0^{2\cos\theta} \rho \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \int_0^{\operatorname{arctg}(1/2)} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta =$$

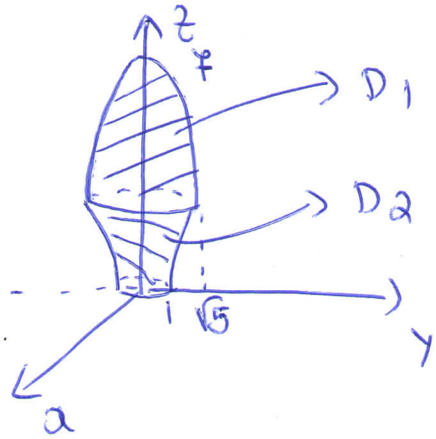
$$= \int_0^{\operatorname{arctg}(1/2)} 2\cos^2\theta \, d\theta = \int_0^{\operatorname{arctg}(1/2)} 1 + \cos(2\theta) \, d\theta =$$

$$= \left[\theta + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right]_0^{\operatorname{arctg}(1/2)} = \operatorname{arctg}(1/2) +$$

$$+ \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\operatorname{arctg}(1/2))$$

4

a)



$S_1 = D_1 \cup D_2$

$D_1 \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$ $\quad 2 \leq z \leq 7$, $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\quad 0 \leq r \leq \sqrt{7-z}$

$|J| = r$

$z = 7 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z = 7 - r^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow r^2 = 7 - z \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow r = \pm\sqrt{7-z}$

$D_2 \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$ $\quad 0 \leq z \leq 2$, $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\quad 0 \leq r \leq \sqrt{1+z^2}$

$|J| = r$

$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow r^2 - z^2 = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow r^2 = 1 + z^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow r = \pm\sqrt{1+z^2}$

$$\text{volume} = \iiint_{S_1} 1 \, dx\,dy\,dz = \iiint_{D_1} 1 \, dx\,dy\,dz + \iiint_{D_2} 1 \, dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_2^{7}\int_0^{\sqrt{7-z}} r \, dr\,dz\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{1+z^2}} r \, dr\,dz\,d\theta$$

b)

$$= 2\pi \int_2^7 \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{7-z}} dz + 2\pi \int_0^2 \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1+z^2}} dz =$$

$$= \pi \int_2^7 7 - z \, dz + \pi \int_0^2 1 + z^2 \, dz =$$

$$= \pi \left[7z - \frac{z^2}{2}\right]_2^7 + \pi \left[z + \frac{z^3}{3}\right]_0^2 =$$

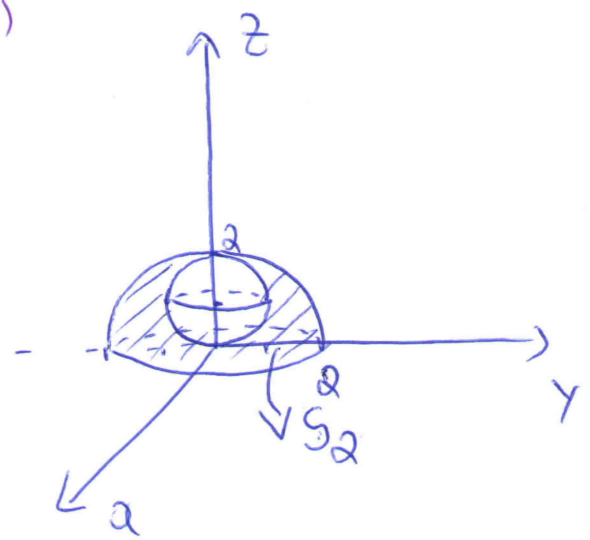
$$= \pi\left(49 - \frac{49}{2} - 14 + 2 + 2 + \frac{8}{3}\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{49}{2} - 10 + \frac{8}{3}\right) = \pi\left(\frac{29}{2} + \frac{8}{3}\right) = \pi\left(\frac{87+16}{6}\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{103}{6}\right)$$

5

a)



$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi/2$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$2\cos\varphi \leq \rho \leq 2$$

$$|J| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$$

$$x^2+y^2+(z-1)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2z+1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 - 2\rho\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underset{\rho\neq 0}{\Leftrightarrow} \rho - 2\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \rho = 2\cos\varphi$$

$$\text{Massa} = \iiint_{S_2} z^2 \, dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_{2\cos\varphi}^{2} \rho^2\cos^2\varphi \, \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho\, d\varphi$$

b)

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \int_{2\cos\varphi}^{2} \rho^4 \cos^2\varphi \,\mathrm{sen}\,\varphi \, d\rho \, d\varphi =$$

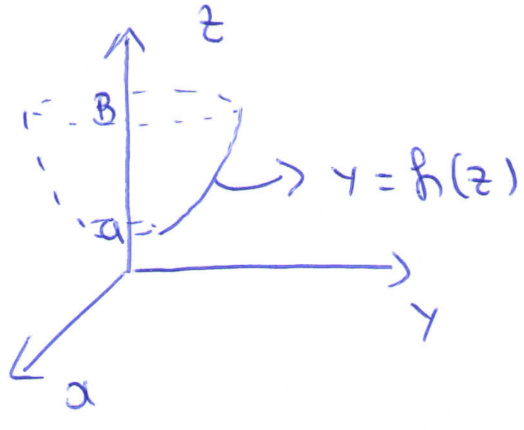
$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^5}{5} \cos^2\varphi \,\mathrm{sen}\,\varphi \right]_{2\cos\varphi}^{2} d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{32}{5} \cos^2\varphi \,\mathrm{sen}\,\varphi - \frac{32}{5} \cos^7\varphi \,\mathrm{sen}\,\varphi \, d\varphi =$$

$$= 2\pi \left[-\frac{32}{5} \frac{\cos^3\varphi}{3} + \frac{32}{5} \frac{\cos^8\varphi}{8} \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= 2\pi \left(\frac{32}{15} - \frac{32}{40} \right) = \frac{8}{3}\pi$$

(6)



$h \in C^1(\mathbb{R})$ e $h'(z) > 0$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ a \le z \le B \\ 0 \le r \le h(z) \end{array}$$

$|J| = r$

$$\text{Massa} = \iiint_{S_3} h'(z) \, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} \int_a^B \int_0^{h(z)} h'(z)\, r \, dr\, dz\, d$$

$$= 2\pi \int_a^B \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{h(z)} h'(z)\, dz = \pi \int_a^B h^2(z)\, h'(z)\, dz =$$

$$= \pi \left[\frac{h^3(z)}{3} \right]_a^B = \pi \left(\frac{h^3(B)}{3} - \frac{h^3(a)}{3} \right)$$