FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática II E – 2º Semestre 2018/19

Exame de Recurso — 28 de Junho de 2019
(Duração 3 horas)

1. **[1.2 val.]** Determine a família de soluções da equação diferencial ordinária de primeira ordem:
$$y^3 y'(x^2+4) = (x+1)(1+y^4)$$

2. O código computacional CESAM simula a vida de uma estrela. O tempo, em milisegundos, que leva a executar a respectiva implementação computacional segue um modelo de crescimento exponencial, variando com o tempo de vida da estrela (expresso em giga-anos).
   (a) **[0.8 val.]** Explicite a equação diferencial associada ao modelo de crescimento exponencial, definindo o significado das variáveis para a situação em análise. Determine a família de soluções correspondente.
   (b) **[0.7 val.]** Sabe-se que simular a vida de duas estrelas, com idades 1 e 2 giga-anos, demorou, respectivamente, 10 e 100 milisegundos. Utilize a informação anterior para determinar o valor das constantes associadas ao modelo de crescimento exponencial.

3. Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:
$$f(x,y) = \sqrt{\frac{\log(5-x^2-y^2)}{|x-1|}} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{sen}(y)$$
   (a) **[0.8 val.]** Determine o conjunto D, domínio de f, esboçando uma sua representação gráfica.
   (b) **[0.7 val.]** Indique $int(D)$ e $fr(D)$. O conjunto D é aberto? E fechado? Justifique.
   (c) **[1.3 val.]** Mostre que é possível prolongar f por continuidade ao ponto $(0,0)$ e defina a correspondente função prolongamento.

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

4. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x,y) = \begin{cases} x\dfrac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} & \text{, se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{, se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) **[1.0 val.]** Determine $g'_{(u_1,u_2)}(0,0)$, para $(u_1,u_2) \neq (0,0)$.

(b) **[1.0 val.]** Calcule o gradiente de g em $(0,0)$. Justifique que g não é diferenciável em $(0,0)$.

5. **[1.3 val.]** Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Considere $z = h(r)$ com $r = \sqrt{x^2+y^2}$ e $r \neq 0$. Mostre que, se $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ então $r\frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{dz}{dr} = 0$.

6. **[1.2 val.]** Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f'_{\vec{u}}(x_*)$ está bem definida para todo o $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$. Mostre que se $f'_{\vec{u}}(x_*) \geq 0, \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$ então $\nabla f(x_*) = 0$.

7. **[1.7 val.]** Determine e classifique os pontos estacionários de $f(x,y) = \frac{x}{y} - xy$.

8. Considere a equação

$$\operatorname{arcsen}(3xy) + \cos(zy^2) = 0$$

(a) **[1.0 val.]** Mostre que esta equação define y como função implícita de x e de z $(y = \phi(x,z))$ numa vizinhança de $(0, 1, \frac{\pi}{2})$ e determine $\frac{\partial \phi}{\partial x}(0, \frac{\pi}{2}), \frac{\partial \phi}{\partial z}(0, \frac{\pi}{2})$. Justifique detalhadamente a sua resposta.

(b) **[0.8 val.]** Determine a família de vectores $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ que satisfaz $y'_{\vec{u}}(0, \frac{\pi}{2}) = 0$.

9. Considere o domínio plano definido por:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq 6 \wedge x^2 + y^2 \geq 9\right\}$$

(a) **[1.3 val.]** Usando coordenadas polares, represente o valor da área de D na forma de um único integral duplo.

(b) **[0.5 val.]** Calcule o valor da área de D.

10. Considere a superfície cónica de equação $z = 3 + \sqrt{x^2 + y^2}$ e a superfície parabólica definida por $z = 3 - x^2 - y^2$. Seja S_1 o sólido definido por:

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3 - x^2 - y^2 \leq z \leq 3 + \sqrt{x^2 + y^2} \wedge x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

(a) **[1.2 val.]** Usando coordenadas cilíndricas, represente o valor do volume de S_1 na forma de um único integral triplo.

(b) **[0.5 val.]** Calcule o valor do volume de S_1.

11. Considere a superfície cónica de equação $z = \sqrt{\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3}}$. Seja S_2 o sólido homogéneo definido por:

$$S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3}} \leq z \leq 2\right\}$$

(a) **[1.3 val.]** Usando coordenadas esféricas e recorrendo a um único integral triplo, represente o valor da massa de S_2.

(b) **[0.5 val.]** Calcule o valor da masssa do sólido S_2.

12. **[1.2 val.]** Sejam a, b, c reais positivos. Prove que o volume do elipsóide de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

é igual a $\frac{4}{3}\pi abc$.