FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática II E – 2º Semestre 2018/19

1º Teste — 30 de Abril de 2019
(Duração 1:30)

1. Num determinado processo de fabrico, resina plástica, aquecida à temperatura de $180°$C, é injectada num molde com o formato pretendido. Seguidamente, os moldes são colocados num sistema de arrefecimento a uma temperatura de $15°$C, aproximadamente constante. Consegue-se assim que as peças arrefeçam cerca de $20°$C no primeiro minuto. Quando as peças atingem a temperatura de $35°$C o molde pode ser aberto, terminando o processo de fabrico.

   (a) **[1.0 val.]** Recorrendo ao modelo de variação da temperatura de Newton, modele matematicamente a situação descrita, em particular definindo o problema de valor inicial que lhe corresponde.

   (b) **[1.0 val.]** Determine a solução da equação diferencial associada à modelação do problema.

   (c) **[1.0 val.]** Quanto tempo demora o arrefecimento necessário ao processo de fabrico das peças plásticas?

2. **[2.5 val.]** Determine a família de soluções da equação diferencial ordinária de primeira ordem:
$$\operatorname{sen}(x)\, xy + y' = \cos(x)\, e^{x\cos(x)}$$

3. Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:
$$f(x,y) = \operatorname{arcsen}(x+y)\frac{x^3 - x^2y}{x^2 - y^2} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

   (a) **[1.5 val.]** Determine o conjunto D, domínio de f, esboçando uma sua representação gráfica.

   (b) **[1.5 val.]** Indique $int(D)$ e $fr(D)$. O conjunto D é aberto? E fechado? Justifique.

   (c) **[2.0 val.]** Mostre que é possível prolongar f por continuidade ao ponto $(0,0)$ e defina a correspondente função prolongamento.

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

4. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^3 + y^2 x)}{x^2 + y^2} & \text{, se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) **[1.0 val.]** Calcule o gradiente de g em $(0,0)$.

(b) **[2.0 val.]** Mostre que g é diferenciável em $(0,0)$.

(c) **[1.0 val.]** Qual é a direcção (e sentido) de descida máxima de g no ponto $(0,0)$?

5. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$g(x,y) = (\operatorname{arctg}(x^3 y^2 + 2x + 3y)\,,\, e^{y\cos(x)}).$$

(a) **[1.5 val.]** Justifique que g é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e calcule a respectiva matriz jacobiana.

(b) **[1.5 val.]** Considere ainda uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Sabendo que $\nabla(f \circ g)(0,0) = [6\ \pi]^\top$, determine $\nabla f(0,1)$.

6. **[2.5 val.]** Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se homogénea positiva de grau $k \in \mathbb{R}$ se satisfaz:

$$f(\alpha x) = \alpha^k f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Sabendo que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é homogénea positiva de grau $k \in \mathbb{R}$ e que todas as suas derivadas parciais de primeira ordem existem em $\mathbb{R}^n$, mostre que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é homogénea positiva de grau $k-1$, para todo o $i \in \{1, \ldots, n\}$.