Primeiro teste de Análise Matemática II E (30/04/2019)

nota: Esta é apenas uma proposta de resolução de entre muitas outras possibilidades

①

a) Seja $y(t)$ a temperatura, em graus centígrados, da peça de resina após t minutos.

$$\begin{cases} y'(t) = k(y(t) - 15) \\ y(0) = 180 \end{cases}$$

$$y(1) = 160$$

b)

$$y'(t) = k(y(t)-15) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'(t) - k\,y(t) = -15k$$

Determinemos o factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int -k\,dt} = e^{-kt}$$

Assim

$$e^{-kt} y'(t) - k e^{-kt} y(t) = -k e^{-kt} 15$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-kt}\, y(t)\right) = -k e^{-kt}\, 15 \iff$$

$$\iff e^{-kt}\, y(t) = \int -k e^{-kt}\, 15\, dt \iff$$

$$\iff e^{-kt}\, y(t) = 15 e^{-kt} + c \quad , c \in \mathbb{R} \iff$$

$$\iff y(t) = 15 + c e^{kt} \quad , c \in \mathbb{R}$$

e)

$$y(0) = 180 \iff 180 = 15 + c \iff c = 165$$

$$y(1) = 160 \iff 160 = 15 + 165 e^{k} \iff$$

$$\iff 145 = 165 e^{k} \iff e^{k} = \frac{145}{165} \iff$$

$$\iff k = \log\left(\frac{145}{165}\right)$$

$$y(t) = 35 \iff 35 = 15 + 165 e^{\log\left(\frac{145}{165}\right) t}$$

$$\iff \frac{20}{165} = e^{\log\left(\frac{145}{165}\right) t}$$

$$\iff \log\left(\frac{145}{165}\right) t = \log\left(\frac{20}{165}\right)$$

$$\iff t = \frac{\log\left(\frac{20}{165}\right)}{\log\left(\frac{145}{165}\right)} \text{ minutos}$$

$$\operatorname{sen} x \; x y + y' = \cos x \, e^{x \cos x}$$

$$\Leftrightarrow y' + x \operatorname{sen} x \, y = \cos x \, e^{x \cos x}$$

Determinemos o factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int x \operatorname{sen} x \, dx} = e^{-x\cos x + \int \cos x \, dx} =$$

$$= e^{-x \cos x + \operatorname{sen} x}$$

Assim

$$e^{-x\cos x + \operatorname{sen} x} y' + x \operatorname{sen} x \, e^{-x\cos x + \operatorname{sen} x} y = \cos x \, e^{\operatorname{sen} x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{-x\cos x + \operatorname{sen} x} y\right) = \cos x \, e^{\operatorname{sen} x}$$

$$\Leftrightarrow e^{-x\cos x + \operatorname{sen} x} y = \int \cos x \, e^{\operatorname{sen} x} dx$$

$$\Leftrightarrow e^{-x\cos x + \operatorname{sen} x} y = e^{\operatorname{sen} x} + c, \; c \in \mathbb{R}$$

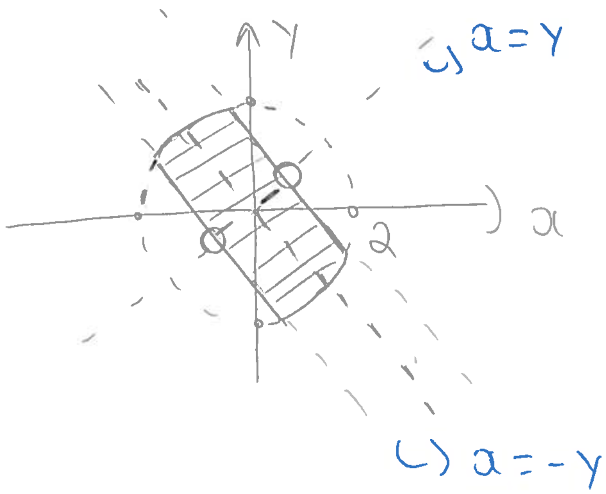
$$\Leftrightarrow y = \frac{e^{\operatorname{sen} x} + c}{e^{-x\cos x + \operatorname{sen} x}}, \; c \in \mathbb{R}, \; x \in \mathbb{R}$$

3

a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x+y \leq 1 \wedge x^2 - y^2 \neq 0 \wedge 4 - x^2 - y^2 \geq 0\}$

$x^2 - y^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq y \wedge x \neq -y$

$4 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$



b)

$\text{int}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x+y < 1 \wedge x^2 - y^2 \neq 0 \wedge 4 - x^2 - y^2 > 0\}$

$\text{fr}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : [(x+y = -1 \vee x+y = 1 \vee x = y \vee x = -y) \wedge 4 - x^2 - y^2 \geq 0] \vee (x^2 + y^2 = 4 \wedge -1 \leq x+y \leq 1)\}$

D não é aberto pois $D \neq \text{int}(D)$. Por exemplo, $(0,1) \in D$ mas $(0,1) \notin \text{int}(D)$.

D não é fechado pois $D \neq \overline{D}$. Por exemplo, $(0,0) \in \text{fr}(D) \subseteq \overline{D}$ mas $(0,0) \notin D$

e)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \arcsin(x+y)\,\frac{x^3-x^2y}{x^2-y^2} + \sqrt{4-x^2-y^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arcsin(x+y)}{x+y}\,\frac{x^2(\cancel{x-y})}{\cancel{x-y}} + \sqrt{4-x^2-y^2} =$$

$$= 1 \times 0^2 + \sqrt{4} = 2 \quad \text{pois} \quad (x,y)\to(0,0) \Rightarrow x+y \to 0$$

e $\lim_{\omega\to 0} \frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega} = 1$.

Como o limite anterior existe, é possível prolongar f por continuidade a $(0,0)$. A função prolongamento é definida por:

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} \arcsin(x+y)\,\dfrac{x^3-x^2y}{x^2-y^2} + \sqrt{4-x^2-y^2}, & \text{se } (x,y)\in D \\ 2, & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

4

a)

$$\frac{dg}{dx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(h^3)}{h^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h^3)}{h^3} = 1 \quad \text{pois} \quad \lim_{\omega\to 0} \frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega} = 1$$

$$\frac{dg}{dy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0,h)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} 0}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Assim $\nabla g(0,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

b) g é diferenciável em $(0,0)$ $\Leftrightarrow$

$$g(h_1,h_2) = g(0,0) + dg(0,0)(h_1,h_2) + \|(h_1,h_2)\| \, \varepsilon(h_1,h_2),$$

com $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$

Se g for diferenciável em $(0,0)$ então $dg(0,0)(h_1,h_2) = h_1$

Assim

$$g(h_1,h_2) = h_1 + \|(h_1,h_2)\| \, \varepsilon(h_1,h_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(h_1,h_2) = \frac{g(h_1,h_2) - h_1}{\|(h_1,h_2)\|}$$

f

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(h_1^3+h_2^2h_1)}{h_1^2+h_2^2} - h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

Considerando coordenadas polares

$$\begin{cases} h_1 = \rho\cos\theta & \rho>0 \\ h_2 = \rho\operatorname{sen}\theta & \theta\in[0,2\pi[\end{cases}$$

vem

$$\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \theta\in[0,2\pi[}} \frac{\operatorname{sen}(\rho^3\cos^3\theta + \rho^3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta)}{\rho^3} - \cos\theta =$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \theta\in[0,2\pi[}} \frac{\operatorname{sen}(\rho^3\cos\theta)}{\rho^3} - \cos\theta$$

Se $\cos\theta = 0$ temos

$$\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \theta=\frac{\pi}{2}}} \frac{0}{\rho^3} = \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \theta=\pi/2}} 0 = 0$$

Se $\cos\theta \neq 0$ temos

$$\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \theta\in[0,2\pi[\setminus\{\pi/2\}}} \frac{\operatorname{sen}(\rho^3\cos\theta)}{\rho^3\cos\theta}\cos\theta - \cos\theta = 0 \text{ pois}$$

$\rho\to 0^+ \Rightarrow \rho^3\cos\theta\to 0$ e $\lim_{\omega\to 0}\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega} = 1$

$\therefore$ g é diferenciável em $(0,0)$

e) Sendo g diferenciável em (0,0), a direcção e sentido de descida máxima de g em (0,0) é

$$-\nabla g(0,0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5

a)

$$Jac\, g(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{3x^2y^2+2}{1+(x^3y^2+2x+3y)^2} & \dfrac{x^3 2y+3}{1+(x^3y^2+2x+3y)^2} \\ e^{y\cos x}(-y\operatorname{sen} x) & e^{y\cos x}\cos x \end{bmatrix}$$

Como todas as derivadas parciais são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$ temos que $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Nota-se que as derivadas parciais são funções contínuas pois resultam de quocientes, produtos e compostas de funções contínuas (polinómios, seno, cosseno e exponencial)

Sendo $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ temos que g é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

b)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

g é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ logo é diferenciável em $(0,0)$
f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ pois $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ logo f é diferenciável em $g(0,0) = (0,1)$

Então $f \circ g$ é diferenciável em $(0,0)$ e

$$Jac(f \circ g)(0,0) = Jac f(0,1) \times Jac g(0,0) =$$

$$= [\alpha \quad \beta] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [2\alpha \quad 3\alpha + \beta] = [6 \quad \pi]$$

Assim

$$\begin{cases} 2\alpha = 6 \\ 3\alpha + \beta = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = \pi - 9 \end{cases}$$

$$\nabla f(0,1) = Jac f(0,1)^T = \begin{bmatrix} 3 \\ \pi - 9 \end{bmatrix}$$

⑥ Seja $i \in \{1, \dots, m\}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ (10)

$$\frac{\partial f}{\partial a_i}(\alpha a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha a_1, \dots, \alpha a_{i-1}, \alpha a_i + h, \alpha a_{i+1}, \dots, \alpha a_m) - f(\alpha a_1, \dots, \alpha a_m)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\alpha^k f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \frac{h}{\alpha}, a_{i+1}, \dots, a_m) - \alpha^k f(a_1, \dots, a_m)}{h}$$

(f é homogénea positiva de grau k)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\alpha^k}{\alpha} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \frac{h}{\alpha}, a_{i+1}, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_m)}{\frac{h}{\alpha}}$$

$$= \alpha^{k-1} \lim_{\omega \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \omega, a_{i+1}, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_m)}{\omega}$$

$$= \alpha^{k-1} \frac{\partial f}{\partial a_i}(a)$$

$\therefore$ $\frac{\partial f}{\partial a_i}$ é homogénea positiva de grau $k-1$