FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática II E – 2º Semestre 2018/19

2º Teste — 12 de Junho de 2019
(Duração 1:30)

1. Considere a equação

$$\operatorname{arctg}(x^2 z) + e^{xy} = \log(y + z^3)$$

   (a) **[3.0 val.]** Mostre que esta equação define x como função implícita de y e de z ($x = \phi(y,z)$) numa vizinhança de $(0, e, 0)$ e determine $\frac{\partial \phi}{\partial y}(e, 0)$, $\frac{\partial \phi}{\partial z}(e, 0)$. Justifique detalhadamente a sua resposta.

   (b) **[0.5 val.]** Poderá ϕ ter um extremo em $(e, 0)$? Justifique.

2. **[3.5 val.]** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = x^2 + 3x + 4y^2$. Determine o máximo e o mínimo de f no conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

3. **[3.5 val.]** Calcule o valor do seguinte integral:

$$\int_0^2 \int_{\sqrt{\frac{y}{9}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} \operatorname{sen}(x^3)\, dx\, dy + \int_2^9 \int_{\sqrt{\frac{y}{9}}}^{1} \operatorname{sen}(x^3)\, dx\, dy$$

   Sugestão: Comece por trocar a ordem de integração.

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

4. Considere as superfícies cónicas de equação $z = -\sqrt{x^2+y^2}$ e $z = \sqrt{3x^2+3y^2}$. Seja S_1 o sólido definido por:

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{3x^2+3y^2} \wedge x^2+y^2+z^2 \leq 4\right\}$$

Assuma que a densidade do sólido é dada por $d(x,y,z) = z^2$, em cada ponto $(x,y,z) \in S_1$.

(a) **[2.0 val.]** Usando coordenadas esféricas, represente o cálculo da massa de S_1 na forma de um único integral triplo.

(b) **[1.5 val.]** Calcule o valor da massa de S_1.

5. Considere o parabolóide de equação $z = 3 - x^2 - y^2$ e o hiperbolóide definido por $x^2+y^2-z^2 = 1$. Seja S_2 o sólido homogéneo definido por:

$$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2 \wedge x^2+y^2-z^2 \geq 1\right\}$$

(a) **[2.0 val.]** Usando coordenadas cilíndricas e recorrendo a um único integral triplo, represente o cálculo do momento de inércia do sólido S_2 em relação ao eixo dos zz.

(b) **[1.5 val.]** Calcule o momento de inércia do sólido S_2 em relação ao eixo dos zz.

6. **[2.5 val.]** Seja S um conjunto compacto de $\mathbb{R}^3$, simétrico em relação a $(0,0,0)$, ou seja,

$$\forall (x,y,z) \in S, (-x,-y,-z) \in S$$

Considere $f : S \to \mathbb{R}$ uma função ímpar, ou seja,

$$\forall (x,y,z) \in S, f(-x,-y,-z) = -f(x,y,z)$$

Mostre que se f é contínua em S, então $\displaystyle\int\int\int_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 0$.