Análise Matemática II E

Segundo Teste (12/06/2019)

Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução, de entre muitas outras possibilidades.

1) a) Seja $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}(x^2 z) + e^{xy} - \log(y+z^3)$.

Começamos por verificar as condições necessárias ao teorema da função implícita.

- $f(0,e,0) = \operatorname{arctg} 0 + e^0 - \log(e) = 1-1 = 0$

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2xz}{1+x^4z^2} + e^{xy}\,y$$

  $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = e^{xy}\,x - \frac{1}{y+z^3}$$

  $$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{x^2}{1+x^4z^2} - \frac{3z^2}{y+z^3}$$

  funções contínuas em $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y+z^3 > 0\}$

Como $e+0^3 = e > 0$ podemos concluir que $f \in C^1$ numa vizinhança de $(0,e,0)$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,e,0) = e \neq 0$

Assim, pelo Teorema da função implícita, concluímos que existe U vizinhança de $(e,0)$ e V vizinhança de 0 e $\phi : U \to V$ tal que

$$\forall (y,z) \in U, \forall x \in V, \; f(x,y,z) = 0 \iff x = \phi(y,z)$$

Mais, $\phi \in C^1(U)$ e

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(y,z) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)} \text{, logo}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(e,0) = - \frac{-\frac{1}{e}}{e} = \frac{1}{e^2}$$

Ainda

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(y,z) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)} \text{, pelo que}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(e,0) = - \frac{0}{e} = 0$$

b) Se $(e,0)$ for um ponto de extremo de ϕ, existindo $\frac{\partial \phi}{\partial y}(e,0)$ e $\frac{\partial \phi}{\partial z}(e,0)$, então ambas teriam de ser nulas. Como $\frac{\partial \phi}{\partial y}(e,0) = \frac{1}{e^2} \neq 0$, ϕ não pode ter um extremo em $(e,0)$.

2) Pretendemos max/min: $f(x,y) = x^2+3x+4y^2$

s. a $\quad x^2+y^2=1$

Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$. D é um conjunto compacto (fechado e limitado) e f, sendo um polinómio, é uma função contínua em D. O teorema de Weierstrass garante então que f tem um máximo e um mínimo absolutos em D.

Determinemos os pontos candidatos a pontos de extremo absoluto determinando os pontos estacionários da função Lagrangeana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2+3x+4y^2 - \lambda(x^2+y^2-1),$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\nabla \mathcal{L}(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3-2\lambda x=0 \\ 8y-2\lambda y=0 \\ -(x^2+y^2-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 2y(4-\lambda)=0 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ y=0 \vee \lambda=4 \\ - \end{cases}$$

Se $y=0$

$$\begin{cases} - \\ - \\ x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} = \\ x=\pm 1 \end{cases}$$

Se $\lambda=4$

$$\begin{cases} 2x+3-8x=0 \\ - \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-6x=0 \\ = \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ - \\ y^2=1-\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} = \\ y^2=\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} = \\ y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

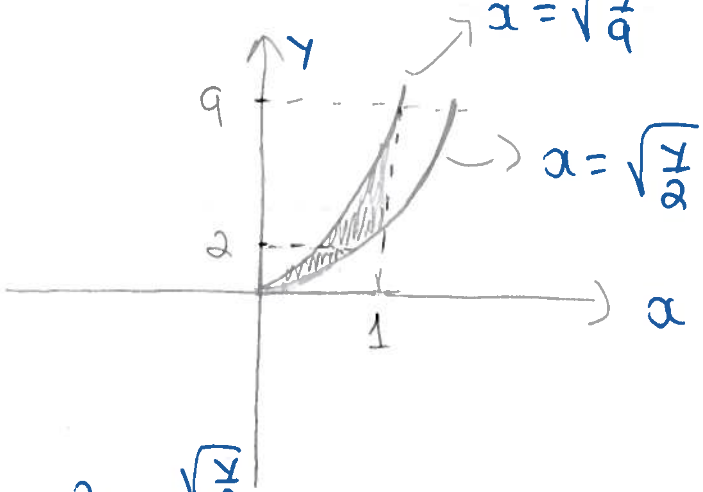
$f(1,0)=4$

$f(-1,0)=-2$

$f\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+3>4$

Assim o mínimo de f é igual a -2 e o máximo de f é igual a $\frac{19}{4}$, considerando a restrição dada.

③



$x=\sqrt{\frac{y}{2}} \Rightarrow x^2=\frac{y}{2} \Leftrightarrow y=2x^2$

$x=\sqrt{\frac{y}{9}} \Rightarrow x^2=\frac{y}{9} \Leftrightarrow y=9x^2$

$$\int_0^2\int_{\sqrt{\frac{y}{9}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} \operatorname{sen}(x^3)\,dx\,dy + \int_2^9\int_{\sqrt{\frac{y}{9}}}^{1} \operatorname{sen}(x^3)\,dx\,dy =$$

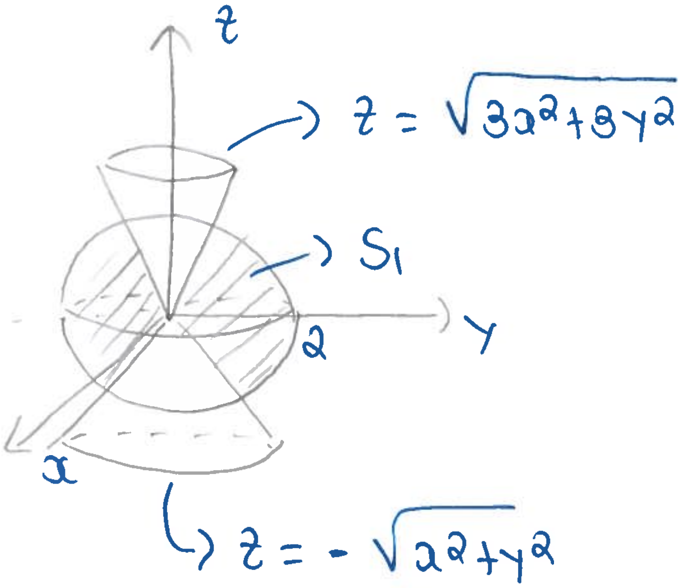
$$= \int_0^1\int_{2x^2}^{9x^2} \operatorname{sen}(x^3)\,dy\,dx = \int_0^1 \Big[\operatorname{sen}(x^3)\,y\Big]_{2x^2}^{9x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \operatorname{sen}(x^3)\,7x^2\,dx = \left[-\frac{\cos(x^3)}{3}\,7\right]_0^1 =$$

$$= (-\cos 1 + 1)\,\frac{7}{3}$$

(4)

a)



$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

$|J_{ae}| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$ $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 2$, $\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}$

$z = \sqrt{3x^2+3y^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho\cos\varphi = \sqrt{3\rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi}$

$\Leftrightarrow \rho\cos\varphi = \rho\sqrt{3}\operatorname{sen}\varphi$ (pois $\varphi \in [0,\pi]$)

$\underset{\rho\neq 0}{\Leftrightarrow} \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = \pi/6$

$z = -\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho\cos\varphi = -\sqrt{\rho^2\operatorname{sen}^2\varphi}$

$\Leftrightarrow \rho\cos\varphi = -\rho\operatorname{sen}\varphi$ (pois $\varphi \in [0,\pi]$)

$\underset{\rho\neq 0}{\Leftrightarrow} \operatorname{tg}\varphi = -1 \Rightarrow \varphi = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$$\text{Massa} = \iiint_{S_1} z^2 \, dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{\pi/6}^{\frac{3\pi}{4}} \rho^2\cos^2\varphi \, \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi\, d\rho\, d\theta$$

b)

$$\text{Massa} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{\pi/6}^{3\pi/4} \rho^4 \cos^2\varphi \,\text{sen}\,\varphi \, d\varphi \, d\rho \, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^2 \left[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\, \rho^4 \right]_{\pi/6}^{3\pi/4} d\rho =$$

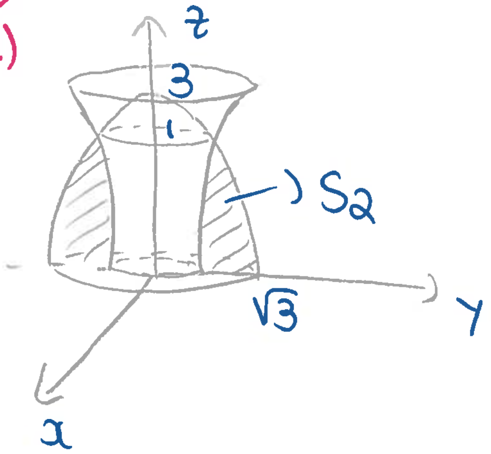
$$= -\frac{2\pi}{3} \int_0^2 \left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \right] \rho^4 \, d\rho =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left(\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{8} \right) \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^2 =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\,\frac{32}{5} \left(\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{8\pi}{15}\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)$$

5

a)



$$z = 3 - x^2 - y^2$$

$$z = 0 \Rightarrow x^2+y^2 = 3$$

$$x^2+y^2-z^2 = 1$$

$$z = 0 \Rightarrow x^2+y^2 = 1$$

$$\begin{cases} z = 3 - x^2 - y^2 \\ x^2+y^2-z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 3-z \\ 3-z-z^2-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ -z^2-z+2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ z = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} \end{cases} = \frac{1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{array}{c} 0 \leq z \leq 1 \\ \sqrt{1+z^2} \leq r \leq \sqrt{3-z} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \qquad |J_{ac}| = r$$

$$d(x,y,z) = k > 0$$

$$z = 3 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow z = 3 - r^2 \Leftrightarrow r^2 = 3 - z \Leftrightarrow r = \cancel{\pm}\sqrt{3-z}$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \Leftrightarrow r^2 - z^2 = 1 \Leftrightarrow r^2 = 1 + z^2 \Leftrightarrow r = \cancel{\pm}\sqrt{1+z^2}$$

Momento de inércia em relação ao eixo dos zz

$$= k \iiint_{S_2} x^2 + y^2 \, dx\,dy\,dz =$$

$$= k \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\sqrt{1+z^2}}^{\sqrt{3-z}} r^2 \, r \, dr\,dz\,d\theta$$

b)

Momento de inércia em relação ao eixo dos zz

$$= k \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\sqrt{1+z^2}}^{\sqrt{3-z}} r^3 \, dr\,dz\,d\theta =$$

$$= 2\pi k \int_0^1 \left[\frac{r^4}{4}\right]_{\sqrt{1+z^2}}^{\sqrt{3-z}} dz =$$

$$= \frac{\pi k}{2} \int_0^1 (3-z)^2 - (1+z^2)^2 \, dz =$$

$$= \frac{\pi k}{2} \int_0^1 9 - 6z + z^2 - 1 - 2z^2 - z^4 \, dz =$$

$$= \frac{\pi k}{2} \int_0^1 8 - 6z - z^2 - z^4 \, dz =$$

$$= \frac{\pi}{2}k\left[8z - 3z^2 - \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{2}k\left(8 - 3 - \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{2}k\left(\frac{25}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}k\left(\frac{24}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{2}k\left(\frac{72-5}{15}\right) = \pi\,\frac{67}{30}k$$

6

Seja $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$(u,v,w) \to (x,y,z) = (-u,-v,-w)$$

$g \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e é injectiva

$$\det(\operatorname{Jac} g(u,v,w)) = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = -1$$

$g(S) = S$, pois S é simétrico em relação à origem

Assim

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(-u,-v,-w)\,|-1|\,du\,dv\,dw$$

$$\underset{(f \text{ é ímpar})}{=} -\iiint_S f(u,v,w)\,du\,dv\,dw$$

Logo

$$2\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 0$$