FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática II E – 1º Semestre 2019/20

Exame de Recurso — 10 de Janeiro de 2020
(Duração 3h)

1. **[1.5 val.]** Determine a família de soluções da equação diferencial ordinária de primeira ordem:

$$\operatorname{arctg}(y^2)\, y\, y'\, e^{-x^2} = x$$

2. Num certo *reality show* testa-se as aptidões de sobrevivência dos concorrentes, quando deixados numa floresta onde existe um lago com gelo fino, estando a água abaixo da superfície à temperatura de $2°C$. Assumindo $37°C$ como a temperatura normal do corpo humano, sabe-se que após 5 minutos de imersão na água do lago, esta baixa $3°C$.

   (a) **[0.5 val.]** Considerando o modelo associado à lei da variação da temperatura de Newton, represente matematicamente a situação descrita, definindo o problema de valor inicial que lhe corresponde.

   (b) **[0.5 val.]** Determine a solução do problema de valor inicial definido na alínea anterior.

   (c) **[0.5 val.]** Sabendo que uma temperatura corporal de $31°C$ é considerada como provavelmente fatal para o ser humano, qual o tempo máximo que as equipas de resgate terão para salvar algum concorrente que caia no lago?

3. Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \log\left(\dfrac{x^2+y^2-4}{x^2+\frac{y^2}{4}-1}\right) + \operatorname{sen}(y^3)\,\dfrac{x^2-2x-3}{xy^3-3y^3} & \text{, se } (x,y) \in D \setminus \{(3,0)\} \\[2ex] 3 & \text{, se } (x,y) = (3,0) \end{cases}$$

   (a) **[0.7 val.]** Determine o conjunto D, domínio de f, esboçando uma sua representação gráfica.

   (b) **[0.8 val.]** Indique $int(D)$ e $fr(D)$. O conjunto D é aberto? E fechado? Justifique.

   (c) **[1.0 val.]** Analise a continuidade de f no ponto $(3,0)$.

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

4. Considere a função $g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x,y) = \begin{cases} \operatorname{tg}(x^2+y^2)\,\dfrac{x^2y-y^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{, se } (x,y) \in D \setminus \{(0,0)\} \\ \\ 0 & \text{, se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) **[0.5 val.]** Calcule o gradiente de g em $(0,0)$.

(b) **[1.0 val.]** Seja $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Determine $g'_{(a,b)}(0,0)$.

(c) **[0.5 val.]** Analise a diferenciabilidade de g em $(0,0)$.

5. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$g(x,y) = (\cos(x^3y) + e^{xy}\,,\, \operatorname{arctg}(x+2y)).$$

(a) **[0.8 val.]** Justifique que g é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e calcule a respectiva matriz jacobiana.

(b) **[0.4 val.]** Considere ainda uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Sabe-se que $\nabla(f \circ g)(0,2) = [-1\ 2]^\top$. Determine $\nabla f\,(g(0,2))$.

6. **[1.3 val.]** Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função tal que $(0,0) \in int(D)$ e

$$|f(x,y)| \leq |xy|,\ \forall (x,y) \in D.$$

Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

7. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por $f(x,y) = (\operatorname{arcsen}(x^2+3xy)\,,\, \operatorname{sen}(ye^x))$.

(a) **[1.0 val.]** Mostre que f é invertível numa vizinhança de $(0,2) \in \mathbb{R}^2$. Justifique detalhadamente a sua resposta.

(b) **[0.5 val.]** Determine a matriz jacobiana de f^{-1} no ponto $(0, \operatorname{sen}(2))$.

8. **[1.6 val.]** Determine e classifique como possíveis extremos, os pontos estacionários de:

$$f(x,y) = \frac{3}{x} + xy^2 + 4x$$

9. **[1.6 val.]** Calcule o valor da soma de integrais:

$$\int_0^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 \log^3(y)dy\,dx + \int_1^2 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{x}} \log^3(y)dy\,dx$$

10. Considere o parabolóide de equação $z = 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}$ e a superfície cónica definida por $x^2 + y^2 - (z-2)^2 = 0$. Seja S_1 o sólido definido por:

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} \wedge z \geq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

(a) **[1.1 val.]** Usando coordenadas cilíndricas e recorrendo a um único integral triplo, represente o cálculo do volume do sólido S_1.

(b) **[0.8 val.]** Calcule o volume do sólido S_1.

11. Considere a esfera definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Seja S_2 o sólido homogéneo definido por:

$$S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge z \geq 1\right\}$$

(a) **[1.1 val.]** Usando coordenadas esféricas, represente o cálculo da massa de S_2 na forma de um único integral triplo.

(b) **[0.8 val.]** Calcule o valor da massa de S_2.

12. **[1.5 val.]** Considere o domínio D definido por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 1\}$$

e a mudança de variáveis definida por $u = x - y$ e $v = x + y$. Calcule:

$$\int\int_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dxdy$$