Exame de Recurso de Análise Matemática II E (10/01/2020)

Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução, de entre muitas outras possibilidades.

1. $\operatorname{arctg}(y^2)\, y\, y'\, e^{-x^2} = x \iff \operatorname{arctg}(y^2)\, y\, y' = x\, e^{x^2}$

Sendo uma equação diferencial ordinária de primeira ordem de variáveis separáveis, temos:

$$\int \operatorname{arctg}(y^2)\, y\, y'\, dx = \int x\, e^{x^2} dx$$

$$\iff \int \operatorname{arctg}(y^2)\, y\, dy = \frac{e^{x^2}}{2} + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\iff \frac{y^2}{2}\operatorname{arctg}(y^2) - \int \frac{y^2}{\cancel{2}}\, \frac{\cancel{2}y}{1+y^4}\, dy = \frac{e^{x^2}}{2} + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R} \iff$$

$$\iff \frac{y^2}{2}\operatorname{arctg}(y^2) - \int \frac{y^3}{1+y^4}\, dy = \frac{e^{x^2}}{2} + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\iff \frac{y^2}{2}\operatorname{arctg}(y^2) - \frac{1}{4}\log(1+y^4) + c_2 = \frac{e^{x^2}}{2} + c_1,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\iff \frac{y^2}{2}\operatorname{arctg}(y^2) - \frac{1}{4}\log(1+y^4) = \frac{e^{x^2}}{2} + c_3,\ c_3 \in \mathbb{R},$$

estando a solução da equação diferencial dada na forma implícita.

(2) (2)

a) Seja $y(t)$ a função que representa a temperatura, em graus centígrados, do corpo de um dos concorrentes no minuto t.

De acordo com a lei da variação da temperatura de Newton sabemos que

$$y' = k(y-2) \quad , \text{ com } k \text{ constante real}$$

Sabemos ainda que

$$y(0) = 37$$
$$y(5) = 34$$

Podemos então considerar o seguinte problema de valor inicial, associado à situação descrita

$$\begin{cases} y' = k(y-2) \\ y(0) = 37 \end{cases}$$

b)

$$y' = k(y-2) \Leftrightarrow y' - ky = -2k \Leftrightarrow \qquad \mu(t) = e^{\int -k\,dt} = e^{-kt}$$

$$\Leftrightarrow e^{-kt} y' - k e^{-kt} y = -2k e^{-kt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-kt} y\right) = -2k\, e^{-kt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-kt} y = \int -2k e^{-kt}\, dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-kt} y = 2e^{-kt} + c \, , c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow y = 2 + c\, e^{kt}, \quad c \in \mathbb{R}$

$y(0) = 37 \Leftrightarrow 37 = 2 + c \Leftrightarrow c = 35$

$\therefore y = 2 + 35\, e^{kt}$

$y(5) = 34 \Leftrightarrow 34 = 2 + 35\, e^{5k} \Leftrightarrow \frac{32}{35} = e^{5k} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5k = \log\left(\frac{32}{35}\right) \Leftrightarrow k = \frac{1}{5} \log\left(\frac{32}{35}\right)$

$\therefore y = 2 + 35\, e^{\frac{1}{5}\log\left(\frac{32}{35}\right)t}$

e)

$31 = 2 + 35\, e^{\frac{1}{5}\log\left(\frac{32}{35}\right)t} \Leftrightarrow \frac{29}{35} = e^{\frac{1}{5}\log\left(\frac{32}{35}\right)t}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{5}\log\left(\frac{32}{35}\right) t = \log\left(\frac{29}{35}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{5 \log\left(\frac{29}{35}\right)}{\log\left(\frac{32}{35}\right)}$ minutos

3

a)

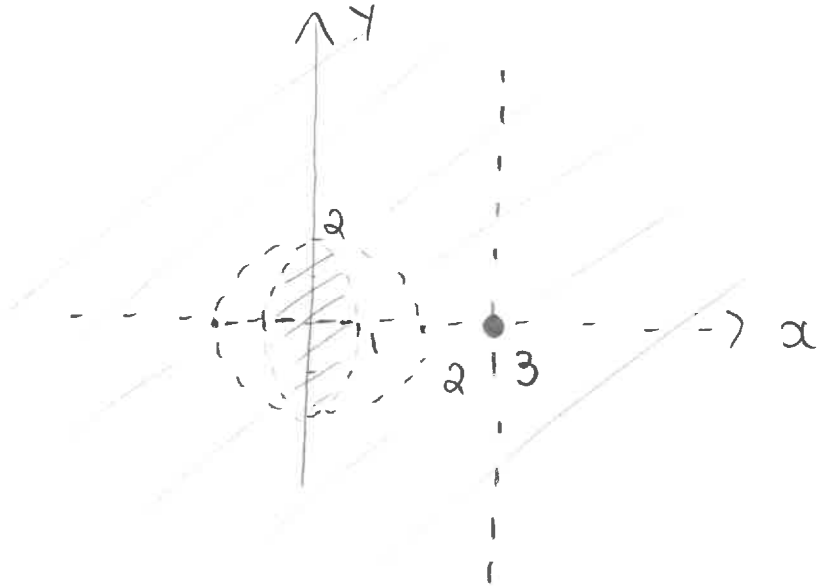
$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2+y^2-4}{x^2+\frac{y^2}{4}-1} > 0 \wedge x^2+\frac{y^2}{4}-1 \neq 0 \wedge xy^3-3y^3 \neq 0 \right\}$$

$$\cup \left\{ (3,0) \right\}$$

$$\frac{x^2+y^2-4}{x^2+\frac{y^2}{4}-1} > 0 \Leftrightarrow \left(x^2+y^2-4 > 0 \wedge x^2+\frac{y^2}{4}-1 > 0 \right) \vee$$

$$\vee \left(x^2+y^2-4 < 0 \wedge x^2+\frac{y^2}{4}-1 < 0 \right)$$

$$xy^3-3y^3 \neq 0 \Leftrightarrow y^3(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0 \wedge x \neq 3$$



b) $$\mathrm{int}(D) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2+y^2-4}{x^2+\frac{y^2}{4}-1} > 0 \wedge x^2+\frac{y^2}{4}-1 \neq 0 \wedge \right.$$

$$\left. y \neq 0 \wedge x \neq 3 \right\}$$

$$\mathrm{fr}(D) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-4 = 0 \vee x^2+\frac{y^2}{4}-1 = 0 \vee x = 3 \right.$$

$$\left. \vee \left(y = 0 \wedge \frac{x^2+y^2-4}{x^2+\frac{y^2}{4}-1} > 0 \right) \right\}$$

D não é aberto pois $D \neq \operatorname{int}(D)$. O ponto $(3,0) \in D$ mas $(3,0) \notin \operatorname{int}(D)$.

D não é fechado pois $D \neq \bar{D}$. Por exemplo, o ponto $(0,0) \in fr(D) \subset \bar{D}$ mas $(0,0) \notin D$

e) f é contínua em $(3,0)$ sse $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,0)} f(x,y)$ existe.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(3,0)\\(x,y)\neq(3,0)}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(3,0)\\(x,y)\neq(3,0)}} \log\left(\frac{x^2+y^2-4}{x^2+\frac{y^2}{4}-1}\right) + \operatorname{sen}(y^3)\,\frac{x^2-2x-3}{xy^3-3y^3}$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(3,0)\\(x,y)\neq(3,0)}} \log\left(\frac{x^2+y^2-4}{x^2+\frac{y^2}{4}-1}\right) + \frac{\operatorname{sen}(y^3)}{y^3}\,\frac{\cancel{(x-3)}(x+1)}{\cancel{x-3}}$$

$$= \log\left(\frac{5}{8}\right) + 1\times 4 \neq 3 = f(3,0)$$

Logo $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,0)} f(x,y)$ não existe, pelo que f não é contínua em $(3,0)$ (f é descontínua em $(3,0)$)

4

a)

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{tg(h^2)}{h} \frac{0}{h^4} =$$

$$= \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0,h)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{tg(h^2)}{h} \frac{-h^3}{h^4} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{tg(h^2)}{h^2} \cdot -\frac{\cancel{h^3}}{\cancel{h^3}} = 1\times(-1) = -1$$

$$\nabla g(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b) $$g'_{(a,b)}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g((0,0)+t(a,b))-g(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{g(ta,tb)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{tg(t^2a^2+t^2b^2)}{t} \frac{t^3a^2b-t^3b^3}{(t^2a^2+t^2b^2)^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{tg(t^2a^2+t^2b^2)}{t^2a^2+t^2b^2} \frac{\cancel{t^3}(a^2b-b^3)}{\cancel{t^3}(a^2+b^2)} =$$

$$= 1 \times \frac{a^2b-b^3}{a^2+b^2} = \frac{a^2b-b^3}{a^2+b^2}$$

e)

Se g fosse diferenciável em $(0,0)$ então, por exemplo,

$$g'_{(1,1)}(0,0) = \nabla g(0,0)^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1$$

Contudo, pela alínea anterior sabemos que

$$g'_{(1,1)}(0,0) = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

Logo g não é diferenciável em $(0,0)$.

5

a)

$$\text{Jac } g(x,y) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(x^3y)\,3x^2y + e^{xy}y & -\operatorname{sen}(x^3y)x^3 + e^{xy}x \\ \dfrac{1}{1+(x+2y)^2} & \dfrac{2}{1+(x+2y)^2} \end{bmatrix}$$

Como todas as derivadas parciais são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$ por serem somas, produtos, compostas de funções contínuas em $\mathbb{R}^2$ (seno, exponencial, polinómios e função racional com denominador não nulo) temos que $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ logo g é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

b) Pelo teorema relativo à diferenciabilidade da função composta sabemos que a composição de funções diferenciáveis é diferenciável e

$$Jac(f \circ g)(0,2) = Jac\, f(g(0,2)) \times Jac\, g(0,2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{1}{17} & \frac{2}{17} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + \frac{B}{17} & \frac{2B}{17} \end{bmatrix}$$

Assim

$$\begin{cases} 2a + \frac{B}{17} = -1 \\ \frac{2B}{17} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -2 \\ B = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ B = 17 \end{cases}$$

Logo

$$\nabla f(g(0,2)) = Jac\, f(g(0,2))^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Comecemos por determinar $f(0,0)$

$$|f(0,0)| \leq |0| = 0 \Rightarrow |f(0,0)| = 0 \Leftrightarrow f(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0)}{h}$$

$$|f(h,0)| \leq |h \times 0| = 0 \Rightarrow |f(h,0)| = 0 \Leftrightarrow f(h,0) = 0$$

Assim

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

De forma análoga se prova que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Se f for diferenciável em $(0,0)$ então

$$f(h_1,h_2) = f(0,0) + df(0,0)(h_1,h_2) + \|(h_1,h_2)\| \, \varepsilon(h_1,h_2),$$

com $\lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$

$$\Leftrightarrow f(h_1,h_2) = \|(h_1,h_2)\| \, \varepsilon(h_1,h_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(h_1,h_2) = \frac{f(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|}$$

$$0 \leq |\varepsilon(h_1,h_2)| = \left| \frac{f(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} \right| = \frac{|f(h_1,h_2)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \frac{|h_1 h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$= \frac{|h_1|\,|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \frac{\cancel{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\;|h_2|}{\cancel{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}} = |h_2|$$

Como $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} 0 = 0$ e $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} |h_2| = 0$

podemos concluir que $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} |\varepsilon(h_1,h_2)| = 0$, usando

o teorema das funções enquadradas.

Assim $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$ pelo que f é diferenciável

em (0,0).

(f)

a)

$$\text{Jac}\, f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{2x+3y}{\sqrt{1-(x^2+3xy)^2}} & \dfrac{3x}{\sqrt{1-(x^2+3xy)^2}} \\ \\ \cos(ye^x)\, ye^x & \cos(ye^x)\, e^x \end{bmatrix}$$

Atendendo a que $1-(0^2+3\times 0\times 2)^2 = 1 > 0$ podemos concluir que todas as derivadas parciais são contínuas numa vizinhança suficientemente pequena de (0,2) (compostas, produtos e quocientes de funções contínuas)

$$|\,\text{Jac}\, f(0,2)\,| = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2\cos 2 & \cos 2 \end{vmatrix} = 6\cos 2 \neq 0$$

Assim, o teorema da função inversa garante a existência de U vizinhança de $(0,2)$ e V vizinhança de $f(0,2) = (0, \operatorname{sen} 2)$ tais que f é uma bijecção de U sobre V, logo f é invertível em U.

b) Ainda pelo teorema da função inversa sabemos que

$$\text{Jac}\, f^{-1}(0, \operatorname{sen} 2) = \text{inv}\left(\text{Jac}\, f(0,2)\right) =$$

$$= \text{inv}\left(\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2\cos 2 & \cos 2 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{6\cos 2}\begin{bmatrix} \cos 2 & 0 \\ -2\cos 2 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{\cos 2} \end{bmatrix}$$

8

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{x^2} + y^2 + 4 \\ 2xy \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{x^2} + y^2 + 4 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ x = 0 \lor y = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ não pertence ao domínio da função logo não é ponto estacionário da função

Se $y = 0$ temos

$$-\frac{3}{x^2} + 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{x^2} = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pontos estacionários

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \text{ e } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

$$\text{Hess} f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{6}{x^3} & 2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$

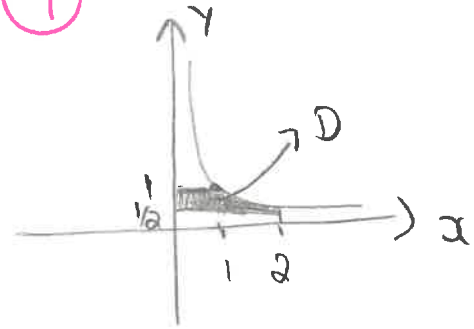
$$\left|\text{Hess} f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)\right| = \begin{vmatrix} \frac{6 \times 8}{3\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 16 > 0$$ Como

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) = \sqrt{3} > 0$ temos que $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ é ponto de mínimo relativo.

$$\left|\text{Hess} f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)\right| = \begin{vmatrix} -\frac{6\times 8}{3\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 16 > 0 .$$

Como $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right) = -\sqrt{3} < 0$ temos que $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ é ponto de máximo relativo.

9



$y=\frac{1}{x} \Leftrightarrow x=\frac{1}{y}$

$$\int_0^1\int_{1/2}^1 \log^3(y)\,dy\,dx + \int_1^2\int_{1/2}^{1/x} \log^3(y)\,dy\,dx =$$

$$= \iint_D \log^3(y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_{1/2}^1\int_0^{1/y} \log^3(y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{1/2}^1 \Big[\log^3(y)\,x\Big]_0^{1/y} dy =$$

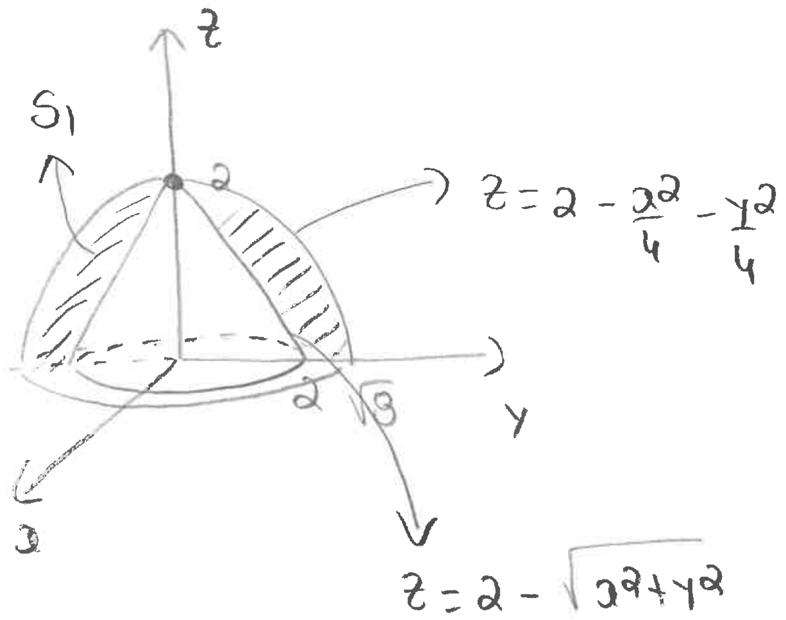
$$= \int_{1/2}^1 \log^3(y)\,\frac{1}{y}\,dy =$$

$$= \left[\frac{\log^4(y)}{4}\right]_{1/2}^1 =$$

$$= -\frac{\log^4(1/2)}{4}$$

10

a)



$$\text{volume} = \iiint_{S_1} 1 \, dx\, dy\, dz$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad |Jac| = r$$

$$0 \leq z \leq 2$$

$$2 - z \leq r \leq \sqrt{8-4z}$$

$$z = 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} \Leftrightarrow z = 2 - \frac{r^2}{4} \Leftrightarrow \frac{r^2}{4} = 2 - z \Leftrightarrow r^2 = 8 - 4z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \pm\sqrt{8-2z}$$

$$z = 2 - \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow z = 2 - \sqrt{r^2} \Leftrightarrow z = 2 - r \Leftrightarrow r = 2 - z$$

$$\text{volume} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \int_{2-z}^{\sqrt{8-4z}} r \, dr\, dz\, d\theta$$

b)

$$\text{volume} = 2\pi \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{2-z}^{\sqrt{8-4z}} dz =$$

$$= 2\pi \int_0^2 \frac{8-4z}{2} - \frac{(2-z)^2}{2} dz =$$

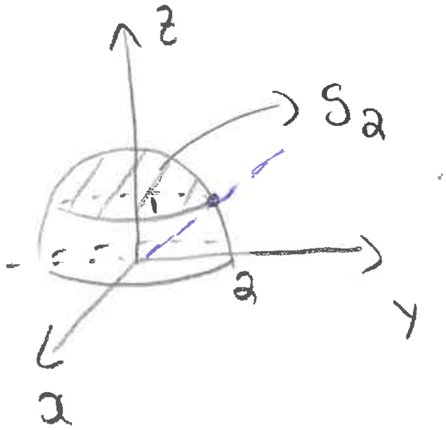
$$= \pi \int_0^2 8-\cancel{4z} - 4 + \cancel{4z} - z^2 dz$$

$$= \pi \int_0^2 4 - z^2 dz = \pi \left[4z - \frac{z^3}{3}\right]_0^2 =$$

$$= \pi \left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3}\pi$$

11

a)



Como o sólido é homogéneo, a sua densidade é constante

$$d(x,y,z) = k \quad , k \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{Massa} = \iiint_{S_2} k \, dx\,dy\,dz$$

$$z = 1 \Leftrightarrow \rho\cos\varphi = 1$$
$$\Leftrightarrow \rho = \frac{1}{\cos\varphi}$$

$$\begin{cases} x = \rho \,\mathrm{sen}\,\varphi \cos\theta \\ y = \rho \,\mathrm{sen}\,\varphi \,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ \frac{1}{\cos\varphi} \le \rho \le 2 \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3} \end{array}$$

$$1 = 2\cos\varphi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$|Jac| = \rho^2 \,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$\text{Massa} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2} k\,\rho^2 \operatorname{sen}\varphi \; d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= 2k\pi \int_0^{\pi/3} \left[\frac{\rho^3}{3}\operatorname{sen}\varphi\right]_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2} d\varphi =$$

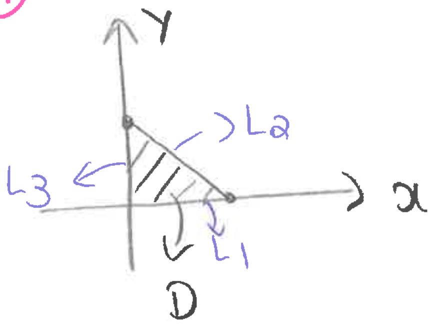
$$= 2k\pi \int_0^{\pi/3} \frac{8}{3}\operatorname{sen}\varphi - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{3\cos^3\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2k\pi \left[-\frac{8}{3}\cos\varphi - \frac{1}{3}\,\frac{\cos^{-2}\varphi}{2}\right]_0^{\pi/3} =$$

$$= 2k\pi \left[-\frac{4}{3} - \frac{1}{6}4 + \frac{8}{3} + \frac{1}{6}\right] =$$

$$= 2k\pi\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{6}\right) = 2k\pi\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{3}k\pi$$

12



$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2x \\ v - u = 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u}{2} + \frac{v}{2} \\ y = \frac{v}{2} - \frac{u}{2} \end{cases}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Comecemos por fazer a imagem das linhas da fronteira do domínio D.

$\boxed{L_1}$

$$\begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1 \qquad \begin{cases} u = x \\ v = x \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u = v \quad 0 \leq u \leq 1$$

$\boxed{L_2}$

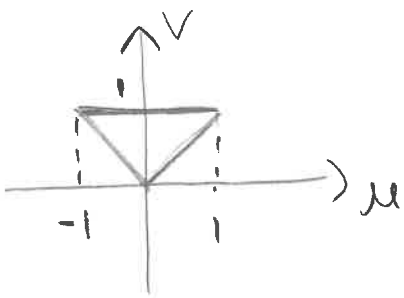
$$\begin{cases} x = x \\ y = 1 - x \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1 \qquad \begin{cases} u = 2x - 1 \\ v = 1 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$v = 1 \quad -1 \leq u \leq 1$$

$\boxed{L_3}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = y \end{cases} \quad 0 \leq y \leq 1 \qquad \begin{cases} u = -y \\ v = y \end{cases} \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$u = -v \quad -1 \leq u \leq 0$$

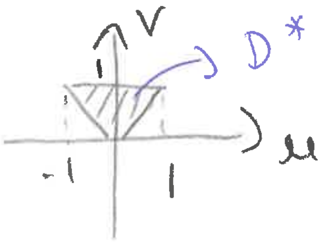


Consideremos agora o varrimento do domínio D pelas rectas $x + y = k$, $0 \leq k \leq 1$ e façamos a sua imagem.

$$\begin{cases} x = x \\ y = k - x \end{cases} \quad 0 \leq x \leq k \qquad \begin{cases} u = 2x - k \\ v = k \end{cases} \quad 0 \leq x \leq k$$

$$v = k \quad -k \leq u \leq k$$

Assim obtemos o novo domínio de integração nas variáveis u e v



$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dx\, dy = \iint_{D^*} e^{\frac{u}{v}} \cdot \frac{1}{2}\, du\, dv =$$

$$= \int_0^1 \int_{-v}^{v} \frac{1}{2} e^{\frac{u}{v}}\, du\, dv = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[v\, e^{\frac{u}{v}} \right]_{-v}^{v} dv =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 ve - ve^{-1}\, dv = \frac{1}{2}(e - e^{-1}) \int_0^1 v\, dv =$$

$$= \frac{(e - e^{-1})}{2} \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^1 = \frac{e - e^{-1}}{4}$$