FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática II E – 1º Semestre 2019/20

1º Teste — 2 de Novembro de 2019
(Duração 1:30)

1. **[3.0 val.]** Determine uma solução para o problema de valor inicial de primeira ordem:

$$\begin{cases} (x^2+1)y\,y' = (x+1)\,e^{-y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. **[2.5 val.]** O método de Euler foi usado para determinar uma aproximação numérica da solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ \frac{dy}{dx} = x\,\sqrt[3]{x-y^3} \end{cases}$$

Sabe-se que $x_2 = 0, y_2 = \frac{1}{4}$ e $y_4 = \frac{1}{4}$. Determine o comprimento de passo utilizado e o valor de x_0.

3. Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \sqrt{y^2 - 4y - x} + \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\frac{x^2 - yx}{x^2 - y^2}$$

   (a) **[1.5 val.]** Determine o conjunto D, domínio de f, esboçando uma sua representação gráfica.

   (b) **[1.5 val.]** Indique $int(D)$ e $fr(D)$. O conjunto D é aberto? E fechado? Justifique.

   (c) **[2.0 val.]** Mostre que é possível prolongar f por continuidade ao ponto $(0,4)$ e defina a correspondente função prolongamento.

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

4. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x,y) = \begin{cases} x^2\, y \dfrac{e^{xy}-1}{(x^2+y^2)^2} & \text{, se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{, se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) **[1.0 val.]** Calcule o gradiente de g em $(0,0)$.
   (b) **[2.0 val.]** Mostre que g não é diferenciável em $(0,0)$.
   (c) **[1.0 val.]** Determine $g'_{(1,2)}(0,0)$.

5. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$g(x,y) = (\operatorname{arctg}(x^4+y)\,,\, \cos(\pi e^{x^2+y})).$$

   (a) **[1.5 val.]** Justifique que g é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e calcule a respectiva matriz jacobiana.
   (b) **[1.0 val.]** Considere ainda uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Sabe-se que $f(0,0) = 1$, $f(0,-1) = -1$, $\nabla f(0,0) = [1 \quad 4]^\top$ e $\nabla f(0,-1) = [2 \quad -3]^\top$. Justifique que $f \circ g$ é diferenciável em $(0,0)$ e calcule $\nabla(f \circ g)(0,0)$.
   (c) **[0.5 val.]** Determine uma aproximação linear ao valor de $(f \circ g)(-0.001, 0.003)$.

6. **[2.5 val.]** Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $a \in int(D)$. Mostre que se f é diferenciável em a então f é contínua em a.