Análise Matemática II E

Primeiro Teste

2/11/2019

Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução, de entre muitas outras possibilidades.

1. Começamos por resolver a equação diferencial associada ao problema de valor inicial, que é uma EDO de primeira ordem, de variáveis separáveis:

$$(x^2+1)\,y\,y' = (x+1)e^{-y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{y^2}\,y\,y' = \frac{x+1}{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int e^{y^2}\,y\,y'\,dx = \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int e^{y^2}\,y\,dy = \int \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{y^2}}{2} = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + c_1,\ c_1\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{y^2} = \log(x^2+1) + 2\operatorname{arctg} x + c_2,\ c_2\in\mathbb{R}$$

que é uma família de soluções da equação diferencial, dadas na forma implícita.

Como $y(0)=1$ vem $e = \log 1 + 2\operatorname{arctg} 0 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = e$

Assim, uma solução para o problema de valor inicial, dada na forma implícita são:

$$e^{y^2} = \log(x^2+1) + 2\operatorname{arctg} x + e$$

(2) Pelo metodo de Euler sabemos que

$$y_4 = y_3 + h\, f(x_3, y_3) =$$
$$= y_2 + h\, f(x_2, y_2) + h\, f(x_2 + h,\ y_2 + h\, f(x_2, y_2))$$

Como $x_2 = 0$, $y_2 = \frac{1}{4}$, $y_4 = \frac{1}{4}$ vem:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + h\, f(0, \tfrac{1}{4}) + h\, f(h, \tfrac{1}{4} + h\, f(0, \tfrac{1}{4}))$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = h\, f(h, \tfrac{1}{4}) \Leftrightarrow 0 = h^2 \sqrt[3]{h - (\tfrac{1}{4})^3}$$

$$\Leftrightarrow \quad h^2 = 0 \vee \sqrt[3]{h - (\tfrac{1}{4})^3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad h = 0 \vee h = \frac{1}{64}$$

Sendo h o comprimento de passo temos que $h > 0$ logo

$$h = \frac{1}{64}.$$

$$x_2 = x_1 + h = x_0 + h + h = x_0 + 2h \Leftrightarrow 0 = x_0 + \frac{2}{64} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x_0 = -\frac{1}{32}$$

③ ③

a)

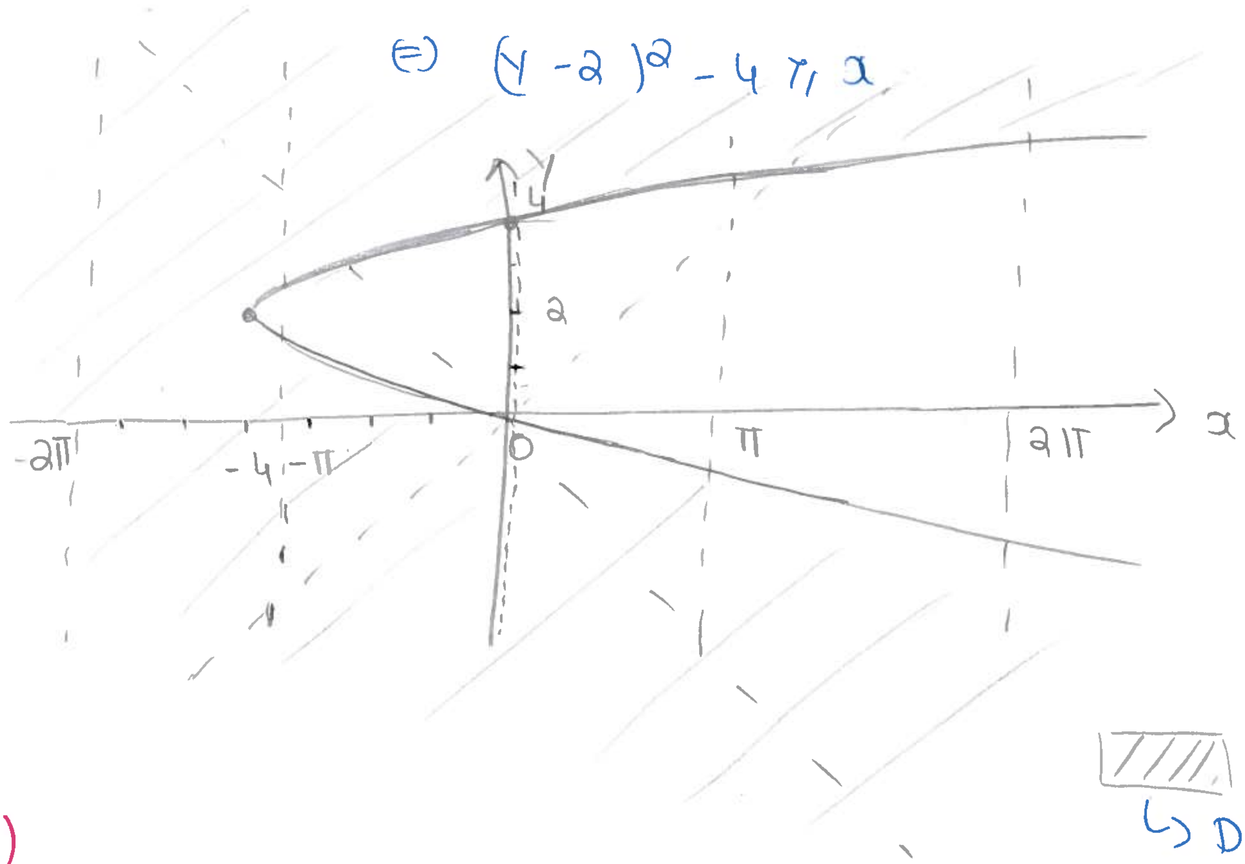
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 4y - x \geq 0 \wedge \sin x \neq 0 \wedge x^2 - y^2 \neq 0\}$

$\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$x^2 - y^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq y \wedge x \neq -y$

$y^2 - 4y - x \geq 0 \Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 \geq x + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y-2)^2 - 4 \geq x$



$\boxed{////}$ ↳ D

b)

$\operatorname{int}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 4y - x > 0 \wedge \sin x \neq 0 \wedge x^2 - y^2 \neq 0\}$

$\operatorname{fr}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 4y - x = 0 \vee ((\sin x = 0 \vee x^2 - y^2 = 0)$
$\wedge\ y^2 - 4y - x > 0)\}$

D não é aberto pois $D \neq \operatorname{int}(D)$. Por exemplo, $(-4,2) \in D$ mas $(-4,2) \notin \operatorname{int}(D)$

D não é fechado pois $D \neq \bar{D}$. Por exemplo, $(0,4) \in \operatorname{fr}(D) \subseteq \bar{D}$ mas $(0,4) \notin D$.

e)

$$\lim_{(x,y)\to(0,4)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,4)} \sqrt{y^2-4y-x} + \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,\frac{x^2-yx}{x^2-y^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,4)} \sqrt{y^2-4y-x} + \frac{x}{\operatorname{sen} x}\,\frac{\cancel{x-y}}{(\cancel{x-y})(x+y)}$$

$$= 0 + 1\,\frac{1}{0+4} = \frac{1}{4} \quad \text{pois } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Como o limite anterior existe, é possível prolongar f por continuidade a $(0,4)$. A função prolongamento é definida como:

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} \sqrt{y^2-4y-x} + \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\,\dfrac{x^2-yx}{x^2-y^2}, & \text{se } (x,y)\in D \\[2em] \dfrac{1}{4}, & \text{se } (x,y) = (0,4) \end{cases}$$

(4)

a) $$\frac{dg}{dx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\times 0\,\dfrac{e^{h\times 0}-1}{(h^2+0^2)^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\frac{dg}{dy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0,h)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0^2 h\,\dfrac{e^{0h}-1}{(0^2+h^2)^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} 0 = 0 \quad \text{logo} \quad \nabla g(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)

g é diferenciável em $(0,0)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(h_1,h_2) = g(0,0) + dg(0,0)(h_1,h_2) + \|(h_1,h_2)\|\,\varepsilon(h_1,h_2)$

com $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$

$g(0,0) = 0$ e $dg(0,0)(h_1,h_2) = \nabla g(0,0)^T \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} =$

$= [0 \;\; 0] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 0$, caso esteja definido

Assim

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{g(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2 h_2 \dfrac{e^{h_1 h_2} - 1}{(h_1^2+h_2^2)^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

Considerando uma mudança de variável para coordenadas polares vem:

$$\begin{cases} h_1 = \rho\cos\theta & \rho > 0 \\ h_2 = \rho\,\text{sen}\,\theta & \theta \in [0, 2\pi[\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{\rho\to 0^+ \\ \theta\in[0,2\pi[}} \rho^3 \cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta \; \frac{e^{\rho^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta} - 1}{\rho^5} =$$

$$= \lim_{\substack{\rho \to 0^+ \\ \theta \in [0, 2\pi[}} \cos^2\theta \, \operatorname{sen}\theta \, \frac{e^{\rho^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta} - 1}{\rho^2} =$$

$$= \lim_{\substack{\rho \to 0^+ \\ \theta \in [0, 2\pi[}} \cos^3\theta \, \operatorname{sen}^2\theta \, \frac{e^{\rho^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta} - 1}{\rho^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta} =$$

$$= \cos^3\theta \, \operatorname{sen}^2\theta \quad \text{pois} \quad \lim_{\substack{\rho \to 0^+ \\ \theta \in [0, 2\pi[}} \frac{e^{\rho^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta} - 1}{\rho^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta} = 1$$

dado que $\lim_{a \to 0} \frac{e^a - 1}{a} = 1$ e $\lim_{\substack{\rho \to 0^+ \\ \theta \in [0, 2\pi[}} \rho^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta = 0$

Como o valor de $\cos^3\theta \operatorname{sen}^2\theta$ varia com θ, concluímos que o limite não existe, logo g não é diferenciável em $(0,0)$.

e)

$$g'_{(1,2)}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{g((0,0) + t(1,2)) - g(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{g(t, 2t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{2t^3 \frac{e^{2t^2} - 1}{(t^2 + 4t^2)^2}}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} 2t^3 \frac{e^{2t^2} - 1}{25 t^5} = \lim_{t \to 0} \frac{4}{25} \frac{e^{2t^2} - 1}{2t^2}$$

$$= \frac{4}{25} \quad \text{pois} \quad \lim_{a \to 0} \frac{e^a - 1}{a} = 1$$

5

a)

$$Jac\, g(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{4x^3}{1+(x^4+y)^2} & \dfrac{1}{1+(x^4+y)^2} \\ -\mathrm{sen}(\pi e^{x^2+y})\pi e^{x^2+y}2x & -\mathrm{sen}(\pi e^{x^2+y})\pi e^{x^2+y} \end{bmatrix}$$

Como todas as derivadas parciais são contínuas em $\mathbb{R}^2$, pois são:

- quocientes de funções contínuas (polinómios)
- compostas de funções contínuas (exponencial e polinómio, eventualmente ainda composta com o seno)
- produtos de funções contínuas

temos que $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Em particular, g é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

b)

g é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ logo é diferenciável em $(0,0)$

$f \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ logo f é diferenciável em $g(0,0) = (0,-1)$

A composta de funções diferenciáveis é diferenciável.

Logo $f \circ g$ é diferenciável em $(0,0)$.

Mais

$$Jac(f\circ g)(0,0) = Jac\, f(0,-1) \times Jac\, g(0,0) =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} = \nabla (f\circ g)(0,0)^T$$

e) Sendo $f\circ g$ diferenciável em $(0,0)$ temos que:

$$(f\circ g)(-0.001, 0.003) \simeq (f\circ g)(0,0) + d(f\circ g)(0,0)(-0.001, 0.003)$$

$$= f(0,-1) + \nabla(f\circ g)(0,0)^T \begin{bmatrix} -0.001 \\ 0.003 \end{bmatrix} =$$

$$= -1 + \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.001 \\ 0.003 \end{bmatrix} = -1 + 0.006 =$$

$$= -0.994$$

6) Se f é diferenciável em a então

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \|h\| \varepsilon(h), \text{ com } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0} f(a) + df(a)(h) + \|h\| \varepsilon(h) =$$

$$= f(a) + df(a)(0) + 0$$ pois o diferenciável é uma aplicação linear, logo contínua.

Mais, sendo uma aplicação linear $df(a)(0) = 0$

Assim

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$ pelo que existe limite de f em $x = a$ logo f é contínua em $x = a$.