Segundo Teste de Análise Matemática II E

(18/12/2019)

Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução, de entre muitas outras possibilidades.

(1)

a) Seja $f(x,y,z) = z\cos(yx) + \operatorname{arctg}(z^2 x) - 2$

- $f(0,-1,2) = 2\cos 0 + \operatorname{arctg} 0 - 2 = 2 + 0 - 2 = 0$

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -z\,\operatorname{sen}(yx)\,y + \frac{z^2}{1+(z^2x)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -z\,\operatorname{sen}(yx)\,x$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \cos(yx) + \frac{2zx}{1+(z^2x)^2}$$

Como todas as derivadas parciais são funções contínuas em $\mathbb{R}^3$, podemos concluir que $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

Em particular, f é de classe C^1 numa vizinhança de $(0,-1,2)$.

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,-1,2) = \frac{4}{1} = 4 \neq 0$$

Pelo Teorema da função implícita existem U vizinhança de $(-1,2)$ e V vizinhança de 0 e $\phi : U \to V$ tal que $\phi \in C^1(U)$ e

$$\forall (y,z) \in U, \forall x \in V, \quad x = \phi(y,z) \Leftrightarrow f(x,y,z) = 0$$

b)

$$\frac{d\phi}{dy}(-1,2) = - \frac{\frac{df}{dy}(0,-1,2)}{\frac{df}{dx}(0,-1,2)} = -\frac{0}{4} = 0$$

$$\frac{d\phi}{dz}(-1,2) = - \frac{\frac{df}{dz}(0,-1,2)}{\frac{df}{dx}(0,-1,2)} = -\frac{\cos 0}{4} = -\frac{1}{4} \neq 0$$

Como $\nabla \phi(-1,2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $(-1,2)$ não é ponto estacionário de ϕ.

2

a) Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$

A é um conjunto compacto, pois é fechado e limitado.

f é contínua em $\mathbb{R}^2$ pois é a soma de duas funções contínuas em $\mathbb{R}^2$, o polinómio $-4x + xy^2$ e o quociente de duas funções contínuas em $\mathbb{R}^2$ (3 e e^x) logo também contínua em $\mathbb{R}^2$.

Pelo Teorema de Weierstrass, f tem um máximo e um mínimo absolutos no conjunto A, ou seja, no cilindro considerado.

b) $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \frac{3}{e^x} - 4x + xy^2 - \lambda(x^2+y^2-4)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\nabla \mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3e^{-x} - 4 + y^2 - 2\lambda x = 0 \\ 2xy - 2\lambda y = 0 \\ -(x^2+y^2-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 2y(x-\lambda) = 0 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ y = 0 \vee x = \lambda \\ - \end{cases}$$

Assim

Se $y=0$ vem $x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$

Se $x=\lambda$ vem $\begin{cases} -\frac{3}{e^{\lambda}} - 4 + y^2 - 2\lambda^2 = 0 \\ = \end{cases} \Leftrightarrow$

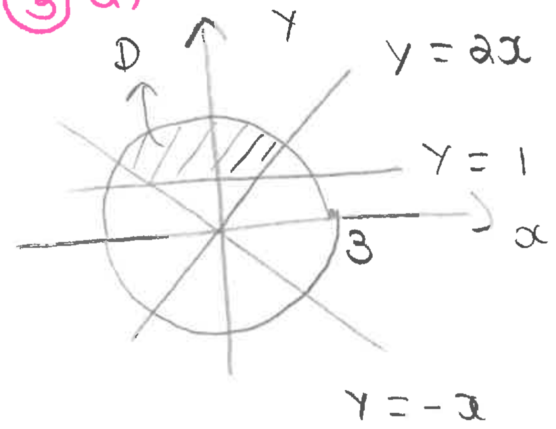
$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2\lambda^2 + 4 + \frac{3}{e^{\lambda}} \\ - \\ \lambda^2 + 2\lambda^2 + \cancel{4} + \frac{3}{e^{\lambda}} - \cancel{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} = \\ \underbrace{3\lambda^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{3}{e^{\lambda}}}_{>0} = 0 \end{cases}$ impossível

$f(2,0) = \frac{3}{e^2} - 8 < 3e^2 + 8 = f(-2,0)$ logo

f tem um máximo absoluto no cilindro em $(-2,0)$, de valor $3e^2+8$ e f tem um mínimo absoluto no cilindro em $(2,0)$, igual a $\frac{3}{e^2} - 8$

③ a)



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \text{arctg}(2) \le \theta \le \frac{3\pi}{4} \quad \frac{1}{\text{sen}\,\theta} \le \rho \le 3$$ (5)

$$y = 2x \underset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{y}{x} = 2 \Leftrightarrow \underset{\rho\cos\theta \neq 0}{\frac{\rho\,\text{sen}\,\theta}{\rho\cos\theta}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\,\theta = 2 \Rightarrow \theta = \text{arctg}(2)$$

$$y = 1 \Leftrightarrow \rho\,\text{sen}\,\theta = 1 \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}$$

$$\text{Área} = \iint_D 1\,dx\,dy =$$

$$= \int_{\text{arctg}(2)}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\text{sen}\theta}}^{3} \rho \;d\rho\, d\theta$$

b)
$$= \int_{\text{arctg}(2)}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\frac{1}{\text{sen}\theta}}^{3} d\theta =$$

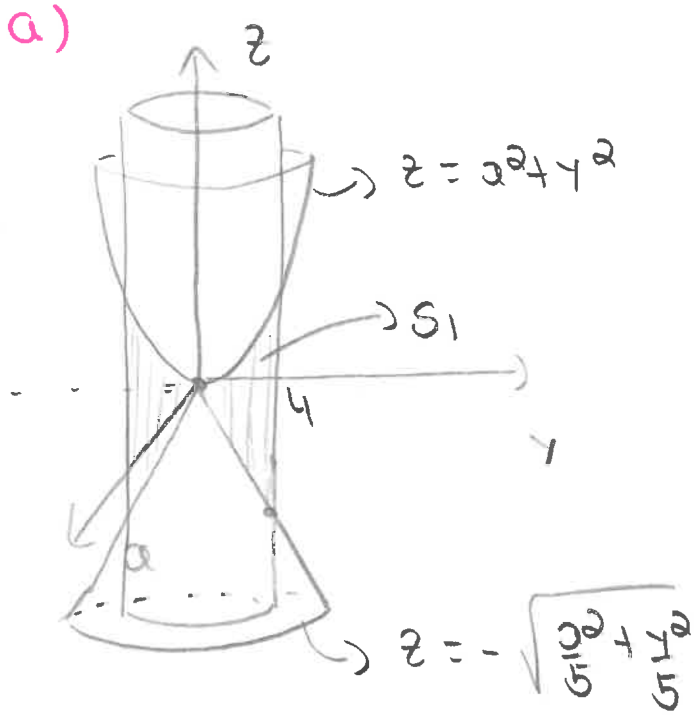
$$= \int_{\text{arctg}(2)}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\text{sen}^2\theta}\; d\theta =$$

$$= \left[\frac{9}{2}\theta + \frac{1}{2}\text{cotg}\,\theta\right]_{\text{arctg}(2)}^{\frac{3\pi}{4}} =$$

$$= \frac{27}{8}\pi + \frac{1}{2}\,\text{cotg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \frac{9}{2}\,\text{arctg}(2) - \frac{1}{2}\,\text{cotg}(\text{arctg}(2))$$

$$= \frac{27\pi}{8} - \frac{1}{2} - \frac{9}{2}\,\text{arctg}(2) - \frac{1}{4} = \frac{27\pi}{8} - \frac{3}{4} - \frac{9}{2}\,\text{arctg}(2)$$

4) a)



$$\begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \le r \le 4 \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \\ z = z & -\frac{r}{\sqrt{5}} \le z \le r^2 \end{cases}$$

$$z = x^2+y^2 \Rightarrow z = r^2$$

$$z = -\sqrt{\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{5}} \Rightarrow z = -\sqrt{\frac{r^2}{5}} = -\frac{r}{\sqrt{5}}$$

$$\text{volume} = \iiint_{S_1} 1\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_{-\frac{r}{\sqrt{5}}}^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta =$$

b)

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^4 \left[rz\right]_{-\frac{r}{\sqrt{5}}}^{r^2} dr\,d\theta =$$

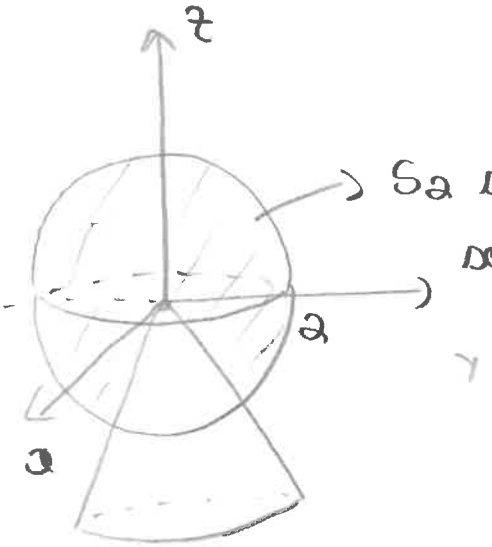
$$= 2\pi\int_0^4 r^3 + \frac{r^2}{\sqrt{5}}\,dr =$$

$$= 2\pi\left[\frac{r^4}{4} + \frac{r^3}{3\sqrt{5}}\right]_0^4 =$$

$$= 2\pi\left(64 + \frac{64}{3\sqrt{5}}\right) = 128\pi\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{15}\right)$$

5

a)



S_2 será a parte sombreada que satisfaz $y \geqslant 0$

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

$0 \leq \rho \leq 2$

$0 \leq \theta \leq \pi$

$0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}$

$z = -\sqrt{\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho \cos\varphi = -\sqrt{\frac{\rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi}{3}}$

$\Leftrightarrow \rho \cos\varphi = -\frac{\rho \operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{3} = \operatorname{tg}\varphi \Rightarrow$

$\rho\cos\varphi \neq 0$

$\Rightarrow \varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$$\text{Massa} = \iiint_{S_2} 1 + y \; dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \int_0^{2} (1 + \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta) \times \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \; d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

b)

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \int_0^{2} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi + \rho^3 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta \; d\rho\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left[\frac{\rho^3}{3} \operatorname{sen}\varphi + \frac{\rho^4}{4} \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta \right]_0^2 d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{8}{3} \operatorname{sen}\varphi + 4 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta \; d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi/3} \frac{8}{3} \operatorname{sen}\varphi + (2 - 2\cos(2\varphi)) \operatorname{sen}\theta \; d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \left[-\frac{8}{3}\cos\varphi + (2\varphi - \operatorname{sen}(2\varphi))\operatorname{sen}\theta \right]_0^{2\pi/3} d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{4}{3} + \frac{4}{3}\pi \operatorname{sen}\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta + \frac{8}{3} \, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} 4 + \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\operatorname{sen}\theta \, d\theta = \left[4\theta - \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\theta \right]_0^{\pi} =$$

$$= 4\pi + \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{20\pi}{3} + \sqrt{3}$$

(6)

a)

$$\nabla f(x)^T (y-x) = f'_{(y-x)}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{f((1-t)x + ty) - f(x)}{t}$$

$$\geq \lim_{t \to 0^+} \frac{(1-t)f(x) + t f(y) - f(x)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{-t f(x) + t f(y)}{t} = f(y) - f(x)$$

b) Se x_* é ponto de extremo relativo de f, como as derivadas parciais de f estão definidas em x^*, pois f é diferenciável em x^*, temos que $\nabla f(x^*) = 0$

Assim

$$\nabla f(x^*)^T (y - x^*) \geq f(y) - f(x^*), \forall y \in \mathbb{R}^n$$

equivale a

$$0 \geq f(y) - f(x^*), \forall y \in \mathbb{R}^n$$

ou seja

$$f(x^*) \geq f(y), \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Concluímos então que $f(x^*)$ é máximo absoluto da função f.