FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática IIE

Primeiro Teste – 18 de Novembro de 2020

1. Considere o problema de valor inicial de 1ª ordem definido por $y' = 4 - 2x$ e $y(0) = 2$ e a utilização do método de Euler com passo $h = 0.5$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- [A] $y_3 = 6.5$.
- [B] y_2 é o valor aproximado de $y(1)$.
- [C] $x_3 = 1.5$.
- [D] $y(2) = 7$.

2. Sejam $f(u,v) = 2u^2 + e^v$ e $g(x,y) = (xe^{xy} + \cos(x^2), \operatorname{arctg}(\frac{3x+2y}{3}))$ funções de duas variáveis reais e $h = f \circ g$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- [A] $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = 0$.
- [B] $\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = \frac{2}{3}$.
- [C] $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = 1$.
- [D] $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = 1$.

3. Considere as seguintes proposições:

(I) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{x^2 sen(y-3)}{x^2+(y-3)^2} = 0.$

(II) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} = 0.$

(III) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = 0,$ para todo $m \in \mathbb{R}$.

(IV) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0.$

(V) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{xy}}{3y} = 0.$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- [A] (I) e (IV) são verdadeiras.
- [B] (II) é falsa e (V) é verdadeira.
- [C] (III) e (V) são verdadeiras.
- [D] (II) e (V) são falsas.

Continua no verso desta folha

4. Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de domínio D e $(a,b) \in \overline{D}$, a aderência de D, tais que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l \in \mathbb{R}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ f é contínua no ponto (a,b).

$\boxed{\text{B}}$ $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} f(a+h_1, b+h_2) = l$.

$\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{\rho\to 0} f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\text{sen}\theta) = l$ para todo $\theta \in [0, 2\pi[$.

$\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} |f(x,y) - l| = 0$.

5. Sejam $f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 - z^2$ e $g(x,y,z) = \log(x^2 + \frac{y^2}{3} - z - 1)$ funções de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}$ e D o domínio de g.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ A superfície de nível S_k de f para $k = 0$ é uma superfície cónica dupla.

$\boxed{\text{B}}$ A representação geométrica da fronteira de D é um parabolóide elíptico.

$\boxed{\text{C}}$ O ponto $(0, 2, 1)$ é um ponto interior a D.

$\boxed{\text{D}}$ D é um conjunto aberto.

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

[Cotação]

6. Num país africano verificou-se que em determinado mês o número de infetados pelo COVID-19 crescia de acordo com o modelo exponencial de dia para dia.

[1.0] (a) Sabendo que inicialmente o número de infetados era 210, represente matematicamente a situação descrita definindo o problema de valor inicial que lhe corresponde.

[1.0] (b) Tendo em conta que o número de infetados no fim do primeiro dia era de 420, determine a solução do problema.

[1.0] (c) Determine uma expressão numérica do número de dias a partir do qual o número de infetados é superior a 10000.

7. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2(x-1)^3 + y^2(x-1+y^4)}{2(x-1)^2+y^2} & , \text{se } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & , \text{se } (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

[1.0] (a) Estude a continuidade de f em $(1,0)$.

[1.0] (b) Determine $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, as derivadas parciais de f.

[1.5] (c) Averigue se f é diferenciável no ponto $(1,0)$.

[1.0] (d) Calcule $f'_{(1,2)}(1,0)$, a derivada de f segundo o vector $(1,2)$ no ponto $(1,0)$.

[2.0] **8.** Considere uma aproximação linear local de uma função diferenciável de duas variáveis para determinar um valor aproximado de $\sqrt{\frac{15{,}89}{9{,}02}}$.

9. Resolva as seguintes equações diferenciais:

[1.5] (a) $(x^2+1)y' - 3x(y-1) = 0$.

(b) $y' = (x+y+3)^2$.

[1.5] (Sugestão: Efectue a mudança de variável $u = x+y+3$).

Fim