1º teste de AM2E 18/11/2020

18 de novembro de 2020

Uma resolução

1. $\boxed{D}$ 2. $\boxed{D}$ 3. $\boxed{D}$ 4. $\boxed{A}$ 5. $\boxed{C}$

6. a) Sejam t a variável que representa o número de dias e $y = y(t)$ a função que dá o valor do número de infetados no dia t.

O modelo de crescimento exponencial aplicado à situação descrita é
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky \\ y(0) = 210 \end{cases} \quad , \text{ para certo } k \in \mathbb{R}^+ .$$
que constitui um problema de valor inicial.

b) Resolvendo a equação diferencial pelo método de variáveis separáveis temos

$$\frac{dy}{dt} = ky \Leftrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = k \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}\,dt = \int k\,dt$$

$$\Leftrightarrow \log|y| = kt + c,\ c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |y| = e^{kt+c},\ c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{kt} \cdot e^{c},\ c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |y| = e^{kt} \cdot c,\ c \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow y = c\,e^{kt},\ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Dado que $y(0) = 210$ vem $210 = c \cdot e^{0}$ ou seja $c = 210$. Assim $y = 210\,e^{kt}$.

De $y(1) = 420$ vem $420 = 210\,e^{k}$ ou seja

De $y(1)=420$ vem $420 = 210\, e^{K}$ ou seja $e^{K} = 2$, ou ainda $K = \log 2$.

Finalmente temos a solução do problema
$$y(t) = 210\, e^{(\log 2)t}.$$

e) Temos
$$y(t) = 10000 \Leftrightarrow 210\, e^{(\log 2)t} = 10000 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{(\log 2)t} = \frac{10000}{210} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\log 2)t = \log\left(\frac{1000}{21}\right)$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{\log\left(\frac{10000}{21}\right)}{\log(2)}.$$

Assim o número de dias a partir do qual o número de infectados é superior a 10000 é
$$\Gamma\left(\frac{\log\left(\frac{10000}{21}\right)}{\log(2)}\right) + 1,$$ onde $\Gamma(x)$ é a parte inteira de $x \in \mathbb{R}$.

7.

a) Temos
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\(x,y)\neq(1,0)}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{2(x-1)^3 + y^2(x-1+y^4)}{2(x-1)^2 + y^2} = \frac{0}{0}$$

Usemos as coordenadas polares centradas no ponto $(1,0)$.

Temos $\begin{cases} x = 1 + \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$, $\rho \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

Obtemos o limite

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{2\rho^3\cos^3\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta\left(\rho\cos\theta + \rho^4\operatorname{sen}^4\theta\right)}{2\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{2\rho^3\cos^3\theta + \rho^3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + \rho^6\operatorname{sen}^6\theta}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{2\rho^3\cos^3\theta + \rho^3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + \rho^6\operatorname{sen}^6\theta}{\rho^2(\cos^2\theta + 1)} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{2\rho\cos^3\theta + \rho\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + \rho^4\operatorname{sen}^6\theta}{\cos^2\theta + 1}.$$

Ora por enquadramento temos

$$\left|\frac{2\rho\cos^3\theta + \rho\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + \rho^4\operatorname{sen}^6\theta}{2}\right| \le \left|\frac{2\rho\cos^3\theta + \rho\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + \rho^4\operatorname{sen}^6\theta}{\cos^2\theta + 1}\right| \le \left|\frac{2\rho\cos^3\theta + \rho\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + \rho^4\operatorname{sen}^6\theta}{1}\right|$$

Dado que $2\rho\cos^3\theta$, $\rho\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta$ e $\rho^4\operatorname{sen}^6\theta$ são produtos de infinitésimos por funções limitadas concluímos que as funções nos extremos das desigualdades acima tende para zero e portanto a função do meio tende para zero também.

Logo $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\(x,y)\neq(1,0)}} f(x,y) = 0 = f(1,0)$.

Assim sendo podemos concluir que f é contínua no ponto $(1,0)$

b) Começamos por calcular as derivadas parciais na origem (ponto em que numa vizinhança a função tem 2 expressões).

Temos

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,0) - \overbrace{f(1,0)}^{0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h^3}{2h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^3}{2h^3} = 1.$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(1,k) - f(1,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{k^2 . k^4}{k^2}}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k^6}{k^3} =$$

$$= \lim_{k\to 0} k^3 = 0.$$

Seja agora $(x,y) \neq (1,0)$. Dado que numa vizinhança destes pontos a função f é dada por uma expressão única podemos fazer por derivação directa.

Temos $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(6(x-1)^2 + y^2)(2(x-1)^2 + y^2) - 4(x-1)(2(x-1)^3 + y^2(x-1+y^4))}{(2(x-1)^2 + y^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(2y(x-1+y^4) + 4y^3 . y^2)(2(x-1)^2 + y^2) - 2y(2(x-1)^3 + y^2(x-1+y^4))}{(2(x-1)^2 + y^2)^2}.$$

c) Sabemos que caso f seja diferenciável no ponto $(1,0)$ temos $Df(1,0)(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0).h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0).h_2 = h_1$.

Então f é diferenciável no ponto $(1,0)$ se

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(1+h_1, 0+h_2) - f(1,0) - h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0.$$

Ora $$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(1+h_1,h_2) - 0 - h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{2h_1^3 + h_2^2(h_1 + h_2^4)}{2h_1^2 + h_2^2} - h_1}{\sqrt{\ \ }} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{2h_1^2+h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\cancel{2h_1^3} + \cancel{h_2^2 h_1} + h_2^6 - \cancel{2h_1^3} - \cancel{h_1 h_2^2}}{(2h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{0}{0}$$

Passando para coordenadas polares temos

$$\begin{cases} h_1 = \rho\cos\theta \\ h_2 = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}, \quad \rho \in \mathbb{R}^+ \text{ e } \theta \in [0, 2\pi[.$$

Vem então

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^6 \operatorname{sen}^6\theta}{(2\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta)\cdot\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3(\rho^3\operatorname{sen}^6\theta)}{\rho^3(\cos^2\theta+\underbrace{\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta}_{1})} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\operatorname{sen}^6\theta}{\cos^2\theta+1}$$

Enquadrando temos

$$\left|\frac{\rho^3\operatorname{sen}^6\theta}{2}\right| \leq \left|\frac{\rho^3\operatorname{sen}^6\theta}{\cos^2\theta+1}\right| \leq \left|\frac{\rho^3\operatorname{sen}^6\theta}{1}\right|$$

Como as expressões dos extremos tendem para zero pois são o produto de um infinitésimo por uma função limitada, vem que a expressão do meio também tende para zero.

Logo a função f é diferenciável no ponto $(1,0)$.

d) $$f'_{(1,2)}(1,0) \underset{(*)}{=} (\nabla f(1,0))^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1$$, dado$^{(*)}$ que f é diferenciável

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1$, dado que f é diferenciável no ponto $(1,0)$.

8. Consideremos $f(x,y) = \sqrt{\frac{x}{y}}$ e o ponto $(x_0, y_0) = (16, 9)$

Então como $f(x,y)$ é diferenciável numa vizinhança de $(16,9)$, pois $\frac{x}{y} \neq 0$ e $y \neq 0$ numa vizinhança do $(16,9)$, podemos usar a aproximação linear

$$f(15.89,\ 9.02) = f(16 - 0.11,\ 9 + 0.02) \approx$$

$$\approx f(16,9) + \frac{\partial f}{\partial x}(16,9).(-0.11) + \frac{\partial f}{\partial y}(16,9).\ 0.02$$

Ora $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{-1/2} \cdot y = \frac{1}{2}\, x\sqrt{y}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{-1/2} \cdot x\left(-\frac{1}{y^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\ \frac{x\sqrt{x}}{y^2\sqrt{y}}$$

Então $\frac{\partial f}{\partial x}(16,9) = 24$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(16,9) = \left(-\frac{2}{3}\right)^5$

Concluímos que $f(15.89, 9.02) \approx \frac{4}{3} + 24(-0.11) + \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot (0.02)$.

9.

a) Tem-se $(x^2+1)y' - 3x(y-1) = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{3x}{x^2+1}\, y = \frac{-3x}{x^2+1}$

que se trata de uma EDO linear de 1ª ordem. Assim

tem-se $G(x) = \int -\frac{3x}{x^2+1}\, dx = -\frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx = -\frac{3}{2}\log(x^2+1) = \log(x^2+1)^{-3/2}$

Sendo $G(x) = \int -\frac{3x}{x^2+1}\,dx = -\frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = -\frac{3}{2}\log(x^2+1) = \log(x^2+1)^{-3/2}$

e o factor integrante $\mu(x) = e^{\log(x^2+1)^{-3/2}} = (x^2+1)^{-3/2}$.

Multiplicando ambos os membros da equação por $\mu(x)$ vem

$$(x^2+1)^{-3/2}y' - \frac{3x}{(x^2+1)^{5/2}}y = \frac{-3x}{(x^2+1)^{5/2}} \Leftrightarrow \left((x^2+1)^{-3/2}y\right)' = \frac{-3x}{(x^2+1)^{5/2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)^{-3/2}y = \int -3x(x^2+1)^{-5/2}\,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)^{-3/2}y = -\cancel{\frac{3}{2}}\frac{(x^2+1)^{-3/2}}{\left(-\cancel{\frac{3}{2}}\right)} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y = 1 + c(x^2+1)^{3/2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Em alternativa poderíamos ter resolvido como equação de variáveis separáveis.

Com efeito tem-se $(x^2+1)y' - 3x(y-1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\underset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} \frac{y'}{y-1} = \frac{3x}{x^2+1}.$$

b) $y' = (x+y+3)^2$

Fazendo $u = x+y+3$ temos $y = u - x - 3$.

Donde por substituição obtemos a equação

$$(u-x-3)' = u^2 \Leftrightarrow u' - 1 = u^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u' = u^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{u'}{u^2+1} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{u'}{u^2+1} \, dx = \int 1 \, dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{u^2+1} \, du = x + c \, , c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{arctg} u = x + c \, , c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow u = \operatorname{tg}(x+c) \, , c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x + y + 3 = \operatorname{tg}(x+c) \, , c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y = \operatorname{tg}(x+c) - x - 3 \, , c \in \mathbb{R}$$