

2º Teste da AMZF (Uma Resolução)

1. C

2. C

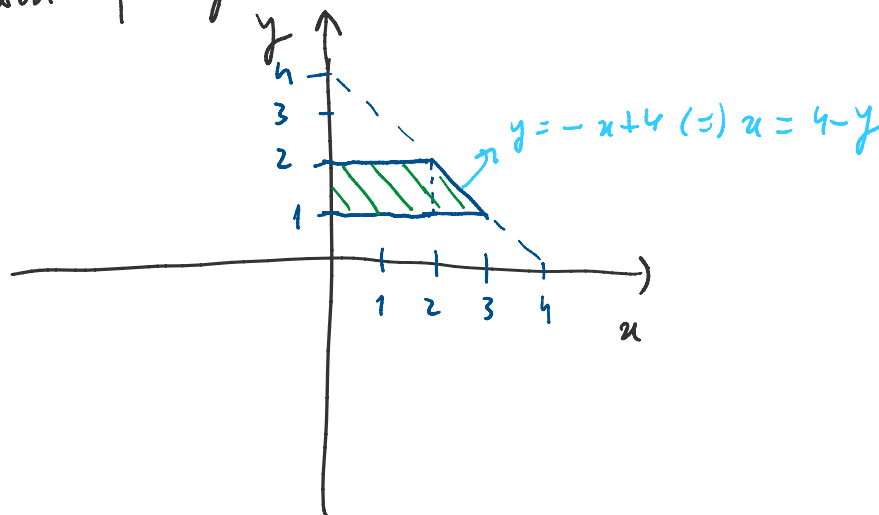
3. D

4. a) A região de integração é $D_1 \cup D_2$ em que

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ e } 1 \leq y \leq 2\} \text{ e}$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 3 \text{ e } 1 \leq y \leq -x + 4\}.$$

A representação gráfica é



b) Invertendo a ordem de integração temos uma região computacionalmente simples que é dada da seguinte forma:

$$D = D_1 \cup D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2 \text{ e } 0 \leq x \leq 4 - y\}.$$

$$c) \text{ Temos } I = \iint_D \frac{1}{(4y - \frac{y^2}{2})^3} dx dy = \int_1^2 \int_0^{4-y} \frac{1}{(4y - \frac{y^2}{2})^3} dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^2 (4-y) \left(4y - \frac{y^2}{2}\right)^{-3} dy = \\
&= \left[\frac{\left(4y - \frac{y^2}{2}\right)^{-2}}{-2} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} \left((8-2)^{-2} - \left(4 - \frac{1}{2}\right)^{-2} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{36} - \left(\frac{2}{7}\right)^2 \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{36} - \frac{4}{49} \right) \\
&= \frac{2}{49} - \frac{1}{72} = \frac{144 - 49}{49 \cdot 72} = \frac{95}{49 \cdot 72}.
\end{aligned}$$

5.

a) O parabolóide $z-4 = -(x^2+y^2)$ tem o vértice no ponto $(0,0,4)$ e está voltado para baixo. Como o sólido é limitado superiormente por esta superfície e observando que $(0,0,1)$ verifica $z-4 \leq -(x^2+y^2)$ e fica abaixo do referido parabolóide concluímos que $z \leq 4 - x^2 - y^2$ e é uma das inequações que define o sólido.

O parabolóide $z = 3x^2 + 3y^2$ ($\Rightarrow z = \frac{x^2}{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2} + \frac{y^2}{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2}$)

tem o vértice em $(0,0,0)$ e está voltado para cima.

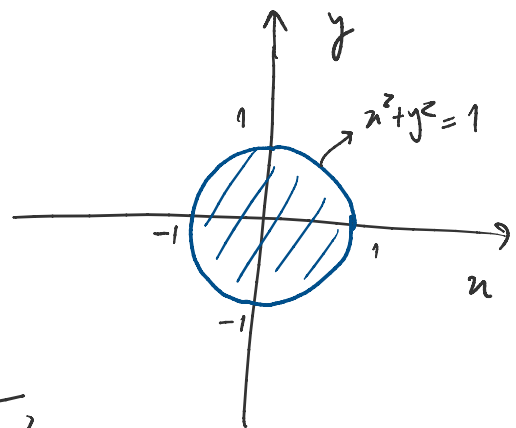
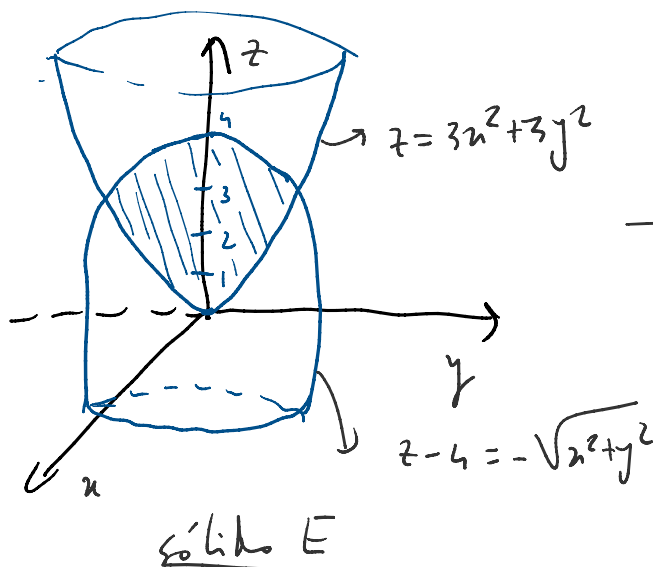
Como este parabolóide limita inferiormente o

Como este paraboloide limita internamente o sólido e como o ponto $(0,0,1)$ verifica $z \geq 3x^2 + 3y^2$ concluímos que esta última desigualdade também define o sólido.

Assim temos

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 4 - x^2 - y^2 \wedge z \geq 3x^2 + 3y^2\}$$

- b) As representações geométricas do sólido E e da sua projeção no plano OXY são as seguintes:



"sombra" do sólido E no plano OXY

Note-se que a interseção das 2 superfícies é dada pelo sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 4 - x^2 - y^2 \\ z = 3x^2 + 3y^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 - x^2 - y^2 = 3x^2 + 3y^2 \\ \text{---} \end{array} \right.$$

$$1.) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

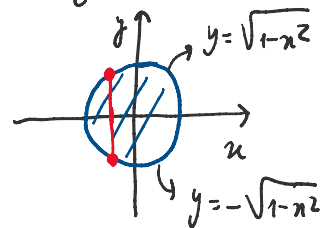
Assum tensor $E = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} : 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq r \leq 1$
 $\wedge 3r^2 \leq z \leq 4-r^2\}$

donc

$$\begin{aligned} \iiint_E xy \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{3r^2}^{4-r^2} (r \cos \theta) (r \sin \theta) \cdot r \, dz \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{3r^2}^{4-r^2} r^3 \cos \theta \sin \theta \, dz \, d\theta \, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (4-r^2-3r^2) \cdot r^3 \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^1 (4r^3 - 4r^5) \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \, dr = \int_0^1 (4r^3 - 4r^5) \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{2\pi} dr = 0. \end{aligned}$$

1) Or on a $x^2 + y^2 \leq 1 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{1-x^2}$

Assum en coordonnées cartésiennes tensor



$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{-1 \leq x \leq 1 \wedge -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}}_{\text{"solide" du disque } x^2 + y^2 \leq 1} \wedge 3x^2 + y^2 \leq z \leq 4-x^2\}$$

c. alors

$$\iiint_E xy \, dx \, dy \, dz = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{3x^2+y^2}^{4-x^2} xy \, dz \, dy \, dx.$$

6.

a) A l'intersection $z = -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \Leftrightarrow z = -\sqrt{\frac{x^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2}}$ et aussi

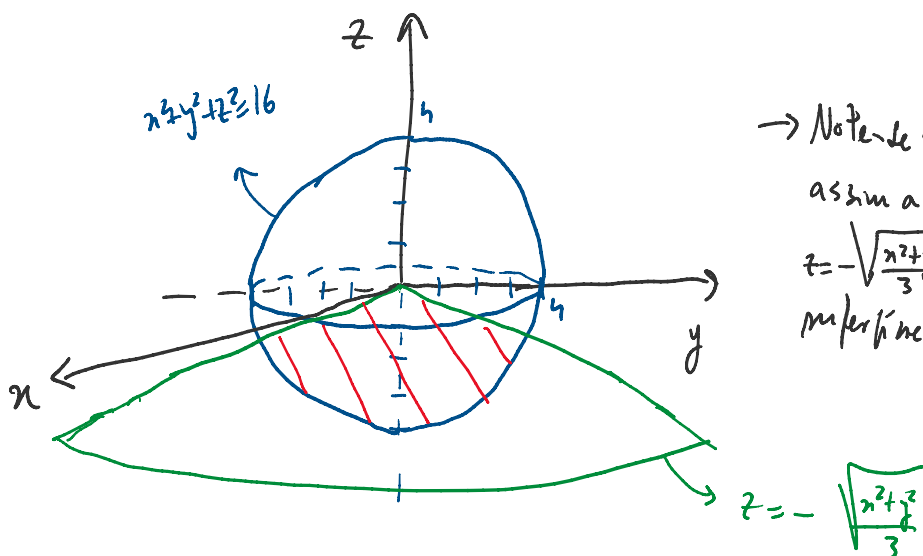
a) A superfície $z = -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$ ($\Leftrightarrow z = -\sqrt{\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3}}$) é uma

superfície cônica cujo vértice é $(0,0,0)$ e está voltada para baixo.

Dado que o ponto $(0,0,1)$ não verifica a condição $z \leq -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$

significa que estamos a considerar o interior da superfície cônica.

A superfície definida por $x^2+y^2+z^2=16$ é uma superfície esférica de centro $(0,0,0)$ e raio 4. A condição $x^2+y^2+z^2 \leq 16$ refere-se ao interior da superfície esférica. Assim uma representação geométrica do sólido S é a seguinte:



→ Note-se que $-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \geq -\sqrt{x^2+y^2}$ assim a superfície cônica $z = -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$ está acima da superfície cônica $z = -\sqrt{x^2+y^2}$

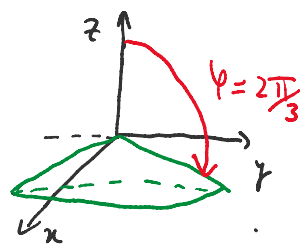
b) Começamos por escrever a equação da superfície cônica em coordenadas esféricas.

$$\text{Temos } \boxed{z = -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}} \Leftrightarrow \rho \cos \varphi = -\sqrt{\frac{\rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho \cos \varphi = -\sqrt{\frac{\rho^2 \sin^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{3}} \Leftrightarrow \rho \cos \varphi = -\frac{\rho \sin \varphi}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan \varphi = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \varphi = \pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \boxed{\varphi = \frac{2\pi}{3}} \quad \varphi \in [0, \pi]$$

o significado geométrico é o seguinte



A equação da superfície esférica em coordenadas esféricas é $\rho = 4$ onde que se trata da superfície esférica de centro $(0,0,0)$ e raio 4.

Assim em coordenadas esféricas

$$S = \{ (\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] : \underbrace{\rho \leq 4}_{\text{interior da superfície esférica}} \text{ e } \underbrace{\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi}_{\text{interior da superfície cônica}} \}.$$

e) Temos que

$$\begin{aligned} \text{Vol}(S) &= \iiint_S 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \rho^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\rho \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^4 \rho^2 \left[-\cos \varphi \right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \rho^2 (\cos \frac{2\pi}{3} - \cos \pi) d\rho \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^4 \rho^2 \left(\frac{1}{2} + 1 \right) d\rho \, d\theta = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^4 d\theta = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \frac{64}{3} d\theta = \frac{3}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{64}{3} = \underline{\underline{64\pi}}. \end{aligned}$$

