

Matemática Discreta

2016/17
Indução

Fátima Rodrigues
Departamento de Matemática
FCT/UNL

Baseados em slides elaborados pelos Professores Dr^a. Isabel Oitavem e Dr^a. Cecília Perdigão

Programa

① Parte 1 - Conjuntos e Relações e Funções

- ① Conjuntos, representações e operações básicas; conjunto das partes; cardinalidade.
- ② Relações binárias: equivalências e ordens parciais.
- ③ Funções: bijecções; inversão e composição.

② Parte 2 - Indução

- ① Definições indutivas
- ② Indução nos naturais e estrutural
 - Primeiro e segundo princípios de indução
 - Funções recursivas e provas por indução

③ Parte 3 - Grafos e Aplicações

- ① Generalidades
- ② Conexidade
- ③ Árvores
- ④ Grafos Eulerianos
- ⑤ Matrizes e grafos

2.1 - Definições indutivas de conjuntos

Com um **número finito de regras** é possível definir conjuntos com um número infinito de elementos. A este tipo de definição dá-se usualmente o nome de **definição indutiva ou recursiva**.

Numa definição indutiva temos:

- 1 Regras (axiomas) que determinam os **elementos básicos** (constantes) do conjunto.
- 2 **Regras** para obter novos elementos a partir dos que já estão no conjunto.

Dizemos que um conjunto com um número infinito de elementos é um **conjunto indutivo** se pode ser gerado pelas regras anteriores.

Exemplo

O conjunto $\mathbb{N}_0$ é um conjunto indutivo pois,

- 1 $0 \in \mathbb{N}_0$
- 2 Se $n \in \mathbb{N}_0$ então $\text{suc}(n) \in \mathbb{N}_0$, onde $\text{suc}(n)$ denota sucessor de n em $\mathbb{N}_0$, ou seja, o elemento que cobre n na cadeia $(\mathbb{N}_0, \leq)$.

Exemplo

O conjunto dos números pares não negativos $\mathbb{P}$ é definido em compreensão por

$$\mathbb{P} = \{2n : n \in \mathbb{N}_0\}$$

Também é possível definir este conjunto indutivamente da seguinte forma:

- 1 $0 \in \mathbb{P}$.
- 2 $x \in \mathbb{P} \Rightarrow \text{suc}(\text{suc}(x)) \in \mathbb{P}$.

Exemplo

Seja SEQ o conjunto de todas as sequências finitas de elementos naturais. Por exemplo, são elementos de SEQ as sequências $(1, 2)$, $(3, 4, 10)$ ou $(3, 2, 1, 4, 3)$.

Vimos anteriormente que $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, (a_2, \dots, a_n))$.

Como definir este conjunto indutivamente?

- 1 A sequência vazia $() \in SEQ$
- 2 Se $x \in \mathbb{N}_0$ e $s \in SEQ \Rightarrow (x, s) \in SEQ$.

Exemplo

Como justificar, usando a definição indutiva de $\mathbb{N}_0$ que $4 \in \mathbb{N}_0$?

Sabemos que:

$0 \in \mathbb{N}_0$ pois 0 pela regra **1** é um elemento básico de $\mathbb{N}_0$.

$1 \in \mathbb{N}_0$ aplicando a regra **2** que diz que como $0 \in \mathbb{N}_0$ então $\text{suc}(0) \in \mathbb{N}_0$.

$2 \in \mathbb{N}_0$ aplicando a regra **2** que diz que como $1 \in \mathbb{N}_0$ então $\text{suc}(1) \in \mathbb{N}_0$.

$3 \in \mathbb{N}_0$ aplicando a regra **2** que diz que como $2 \in \mathbb{N}_0$ então $\text{suc}(2) \in \mathbb{N}_0$.

$4 \in \mathbb{N}_0$ aplicando a regra **2** que diz que como $3 \in \mathbb{N}_0$ então $\text{suc}(3) \in \mathbb{N}_0$.

Exemplo

Mostre que a sequência $(3, 4, 2, 4) \in \text{SEQ}$. Temos:

$() \in \text{SEQ}$ axioma

$4 \in \mathbb{N}_0$ e $() \in \text{SEQ} \Rightarrow (4, ()) = (4) \in \text{SEQ}$

$2 \in \mathbb{N}_0$ e $(4) \in \text{SEQ} \Rightarrow (2, (4)) = (2, 4) \in \text{SEQ}$

$4 \in \mathbb{N}_0$ e $(2, 4) \in \text{SEQ} \Rightarrow (4, (2, 4)) = (4, 2, 4) \in \text{SEQ}$

$3 \in \mathbb{N}_0$ e $(4, 2, 4) \in \text{SEQ} \Rightarrow (3, (4, 2, 4)) = (3, 4, 2, 4) \in \text{SEQ}$

Regras de inferência

*Um sistema dedutivo é constituído por um conjunto de axiomas e regras (**regras de inferência**).*

As regras de inferência são normalmente escritas na forma

$$\frac{J_1 \dots J_n}{J}$$

onde $J_1 \dots J_n, J$ são asserções ou proposições, tendo-se $n = 0$ quando a regra J é um axioma.

Exemplo

Usando a definição indutiva de $\mathbb{N}_0$ podemos escrever assim as suas regras de inferência:

$$\overline{0 \in \mathbb{N}_0} \quad \text{e} \quad \frac{n \in \mathbb{N}_0}{\text{suc}(n) \in \mathbb{N}_0}$$

Exemplo

O conjunto dos números pares não negativos $\mathbb{P}$ foi definido indutivamente da seguinte forma:

- 1 $0 \in \mathbb{P}$.
- 2 $x \in \mathbb{P} \Rightarrow \text{suc}(\text{suc}(x)) \in \mathbb{P}$.

as suas regras de inferência são:

$$\overline{0 \in \mathbb{P}} \quad \text{e} \quad \frac{x \in \mathbb{P}}{\text{suc}(\text{suc}(x)) \in \mathbb{P}}$$

Exemplo

Seja SEQ o conjunto de todas as sequências finitas de elementos naturais definido indutivamente por

- 1 A sequência vazia $() \in SEQ$
- 2 Se $x \in \mathbb{N}_0$ e $s \in SEQ \Rightarrow (x, s) \in SEQ$.

as suas regras de inferência são:

$$\overline{() \in SEQ} \quad \text{e} \quad \frac{x \in \mathbb{N}_0 \quad s \in SEQ}{(x, s) \in SEQ}$$

Uma proposição J diz-se **derivável** se, e só se, uma das seguintes situações ocorre:

- $\neg J$ é um axioma.
- $\frac{J_1 \dots J_n}{J}$ é uma regra de inferência e $J_1 \dots J_n$ são asserções deriváveis.

Podemos determinar se um elemento pertence a um dado conjunto indutivo aplicando as regras de inferência pela ordem contrária (trabalhando de baixo para cima).

Exemplo

$\text{suc}(\text{suc}(0)) \in \mathbb{N}_0$ é derivável de acordo com a definição de $\mathbb{N}_0$ anteriormente descrita:

$$\frac{\frac{\overline{0 \in \mathbb{N}_0}}{\text{suc}(0) \in \mathbb{N}_0}}{\text{suc}(\text{suc}(0)) \in \mathbb{N}_0}$$

Exemplo

Como justificar, usando as regras de inferência de $\mathbb{N}_0$, que $4 \in \mathbb{N}_0$?

Temos:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{0 \in \mathbb{N}_0}{\text{suc}(0) \in \mathbb{N}_0}}{\text{suc}(\text{suc}(0)) \in \mathbb{N}_0}}{\text{suc}(\text{suc}(\text{suc}(0))) \in \mathbb{N}_0}}{\text{suc}(\text{suc}(\text{suc}(\text{suc}(0)))) \in \mathbb{N}_0}}$$

Exemplo

Mostre, usando as regras de inferência, que a sequência $(3, 4, 2, 4) \in \text{SEQ}$.

Temos:

$$\frac{3 \in \mathbb{N}_0 \quad \frac{4 \in \mathbb{N}_0 \quad \frac{2 \in \mathbb{N}_0 \quad \frac{4 \in \mathbb{N}_0 \quad \frac{() \in \text{SEQ}}{(4) \in \text{SEQ}}}{(2,4) \in \text{SEQ}}}{(4,2,4) \in \text{SEQ}}}{(3,4,2,4) \in \text{SEQ}}$$

Palavras

Uma **palavra** é uma sequência finita de zero ou mais elementos colocados uns a seguir aos outros por justaposição.

Os elementos individuais com os quais podemos construir palavras constituem o **alfabeto** habitualmente representado por Σ .

Uma palavra sem elementos designa-se por **palavra vazia** e denota-se por ϵ .

O **comprimento** de uma palavra é a quantidade de caracteres dessa palavra, e pode ser qualquer valor inteiro não negativo.

A palavra vazia é a única palavra de comprimento 0.

O conjunto de todas as palavras, sobre Σ , de comprimento n é denotado por Σ^n .

Notemos que $\Sigma^0 = \{\epsilon\}$ para qualquer alfabeto Σ .

Exemplo

O conjunto das **palavras binárias** $\mathbb{W}$ é um conjunto de palavras definido sobre o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ (sequências finitas de 0's e 1's). O conjunto $\mathbb{W}$ é um conjunto indutivo definido pelas regras:

- ① $\epsilon \in \mathbb{W}$;
- ② Se $w \in \mathbb{W}$, então $\text{conc}_0(w) \in \mathbb{W}$ (onde $\text{conc}_0(w)$ corresponde a "aumentar" a palavra w justapondo à direita de w o elemento 0);
- ③ Se $w \in \mathbb{W}$, então $\text{conc}_1(w) \in \mathbb{W}$ (onde $\text{conc}_1(w)$ corresponde a "aumentar" a palavra w justapondo à direita de w o elemento 1).

Ao conjunto $\mathbb{W}$ correspondem as seguintes regras de inferência:

$$\frac{}{\epsilon \in \mathbb{W}} \qquad \frac{w \in \mathbb{W}}{\text{conc}_0(w) \in \mathbb{W}} \qquad \frac{w \in \mathbb{W}}{\text{conc}_1(w) \in \mathbb{W}}$$

Exemplo

Por exemplo, para as palavras binárias $\mathbb{W}$ temos $\{0, 1\}^2 = \{00, 01, 10, 11\}$.

Árvores binárias

Seja K um conjunto finito ou infinito e indutivo. O conjunto $\mathbb{A}$ das árvores binárias sobre K é um conjunto de vértices e arcos (linhas que ligam dois vértices) definido indutivamente pelas regras:

- A árvore vazia $()$ é uma árvore binária.
- Se A e B são duas árvores binárias e $k \in K$ então $\text{nodo}_k(A, B)$ é uma árvore binária.

Onde $\text{nodo}_k(A, B)$ é a árvore que se obtém ligando um novo vértice com etiqueta k , por um único arco, a cada uma das árvores A e B .

Chama-se **árvore esquerda** a A e **árvore direita** a B .

Definição

- Cada elemento de uma árvore binária designa-se por **vértice**.
- Chama-se *grau* de um vértice de A ao número de arcos que tocam nesse vértice.

Definição

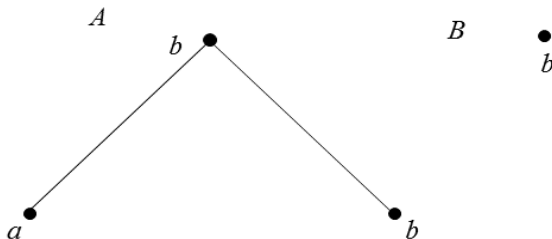
- Se uma árvore $C = \text{nodo}_k(A, B)$ dizemos que o novo vértice criado é **ascendente** dos únicos vértices de A e de B aos quais está ligado.
- Chamamos **raiz** ao único vértice de uma árvore sem ascendente.
- Aos vértices que não são ascendentes de nenhum vértice de uma árvore chamamos **folhas**.
- O **nível** de um vértice é o número de vértices, com excepção da raiz, que estão no segmento que une o vértice à raiz (a raiz tem nível zero).
- A **altura** de uma árvore é o máximo dos níveis dos seus vértices.

A representação gráfica de árvores adopta as seguintes convenções:

- *A raiz está no topo;*
- *Os vértices são representados por círculos;*
- *Os arcos são representados por linhas.*

Exemplo

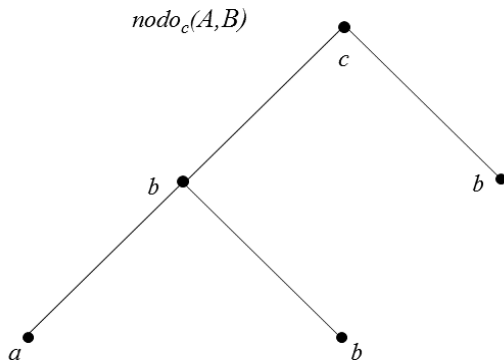
Seja $K = \{a, b, c\}$ Sejam A e B as seguintes árvores sobre K



O vértice b é a raiz da árvore A .

O vértice b é a raiz da árvore B mas também é folha.

A árvore que se obtém a partir das árvores anteriores fazendo $\text{nodo}_c(A, B)$ é



O vértice c é a raiz da árvore $C = \text{nodo}_c(A, B)$.

Os vértices a e b são folhas de C .

A altura da árvore C é 2.

O conjunto das *árvores binárias de 0's e 1's* $\mathbb{T}$ é um conjunto de vértices e arcos (linhas que ligam dois vértices) definido indutivamente pelas regras:

$0 \in \mathbb{T}$, isto é, 0 é uma árvore constituída pelo único vértice 0.

$1 \in \mathbb{T}$; isto é, 1 é uma árvore constituída pelo único vértice 1.

Se $t_1 \in \mathbb{T}$ e $t_2 \in \mathbb{T}$, então $\text{nodo}(t_1, t_2) \in \mathbb{T}$.

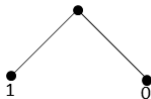
onde $\text{nodo}(t_1, t_2)$ é a árvore que se obtém ligando um novo vértice, por um único arco, a cada uma das árvores t_1 e t_2 .

A este conjunto correspondem as regras de inferência:

$$\overline{0 \in \mathbb{T}} \qquad \overline{1 \in \mathbb{T}} \qquad \frac{t_1 \in \mathbb{T} \quad t_2 \in \mathbb{T}}{\text{nodo}(t_1, t_2) \in \mathbb{T}}$$

Exemplo

A seguinte árvore é uma árvore binária de 0's e 1's



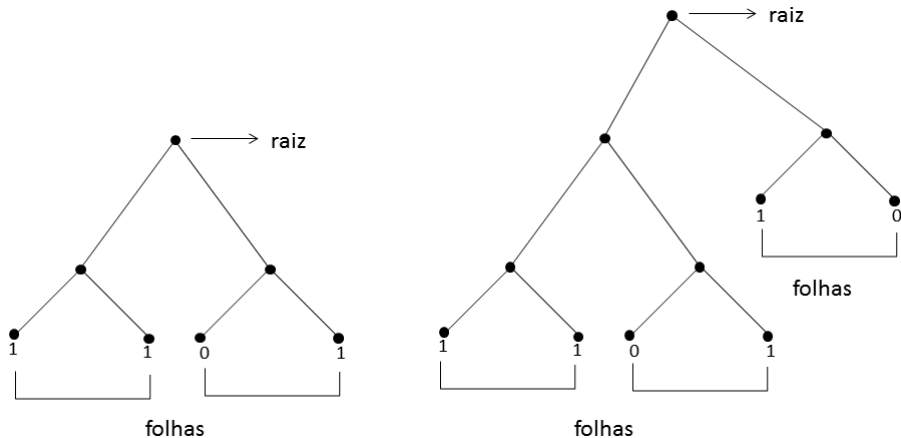
que corresponde a *nodo*(1, 0) em $\mathbb{T}$.

A altura desta árvore é 1.

O nível das suas folhas é também 1.

Exemplo

São árvores binárias de 0's e 1's



que correspondem às árvores obtidas por $nodo(nodo(1, 1), nodo(0, 1))$, e por $nodo(nodo(nodo(1, 1), nodo(0, 1)), nodo(1, 0))$, respectivamente.

Exercícios

- 1 Defina indutivamente o conjunto L de todas as palavras sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ da forma $\{\epsilon, 01, 0011, 000111, \dots\}$, isto é, as palavras constituídas por um certo número de 0's consecutivos seguidos pelo mesmo número de 1's consecutivos.
- 2 Prove que $nodo(0, nodo(1, 0)) \in \mathbb{T}$ e represente a respectiva árvore binária.

Uma vez que uma função é um subconjunto de um produto cartesiano então, em certos casos, também uma função pode ser definida indutivamente.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ a função tal que $f(n) = 3n$, para todo o $n \in \mathbb{N}_0$. Uma vez que

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 3 = f(0) + 3, \quad f(2) = 6 = f(1) + 3, \dots,$$

podemos definir recursivamente esta função por

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(n+1) = f(n) + 3 \end{cases}$$

Exemplo

Definamos indutivamente a função $h : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{N}_0$ que determinará o número de 1's de uma palavra de $\mathbb{W}$.

Atendamos a que:

- A palavra vazia não tem um's, podemos afirmar que $h(\epsilon) = 0$;
- Dada uma palavra $w \in \mathbb{W}$, $\text{conc}_0(w)$ tem exactamente o mesmo número de um's que w
- Dada uma palavra $w \in \mathbb{W}$, $\text{conc}_1(w)$ tem mais um 1 que w .

Assim, a função h poderá ser definida recursivamente por:

$$\begin{cases} h(\epsilon) = 0 \\ h(\text{conc}_0(w)) = h(w) \\ h(\text{conc}_1(w)) = h(w) + 1 \end{cases} \quad \forall w \in \mathbb{W}.$$

2.2 - Indução nos Naturais e Estrutural

Para provar que **uma propriedade P é válida num conjunto indutivo A** , é suficiente provar que *qualquer que seja a regra de inferência (associada à definição indutiva de A)*

$$\frac{J_1 \cdots J_n}{J}$$

se $J_1, \dots, J_n$ satisfazem a propriedade P então J também satisfaz P .

Indução sobre $\mathbb{N}_0$

As regras de inferência para $\mathbb{N}_0$ são

$$\frac{}{0 \in \mathbb{N}_0} \qquad \frac{n \in \mathbb{N}_0}{\text{suc}(n) \in \mathbb{N}_0}$$

Assim, uma propriedade P é válida em $\mathbb{N}_0$ se:

- $P(0)$, i.e. P é válida para 0, e
- $\forall n (P(n) \Rightarrow P(\text{suc}(n)))$, i.e., qualquer que seja n , se P é válida para n então é válida para $\text{suc}(n)$.

Primeiro Princípio de Indução

A indução sobre $\mathbb{N}_0$ é usualmente designada por *indução matemática* e pode ser formulada como se segue:

$$[P(0) \wedge \forall n (P(n) \Rightarrow P(\text{suc}(n)))] \Rightarrow \forall n P(n)$$

Sejam $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_m = \{l \in \mathbb{N}_0 : l \geq m\}$ e S um subconjunto de $\mathbb{N}_m$ tal que:

- 1 $m \in S$;
- 2 $k \in S \Rightarrow k + 1 \in S$, para qualquer $k \in \mathbb{N}_m$.

Então $S = \mathbb{N}_m$.

Exemplo

Mostremos, usando o princípio de indução que $2n + 1 \leq 2^n$, para qualquer natural $n \geq 3$.

Observemos que:

$$\mathbb{N}_m = \mathbb{N}_3$$

$$S = \{n \in \mathbb{N}_3 : 2n + 1 \leq 2^n\}$$

Assim, teremos de provar que $S = \mathbb{N}_3$.

Como $2 \times 3 + 1 = 7 \leq 2^3 = 8$ temos que $3 \in S$.

HI: Suponhamos que dado $k \in \mathbb{N}_3$, $k \in S$.

Verifiquemos agora que também $k + 1 \in S$.

Ora,

$$2(k + 1) + 1 = 2k + 2 + 1 = 2k + 1 + 2 \leq \quad \quad \quad (\text{Por HI})$$

$$2^k + 2 \leq 2^k + 2^k = 2^{k+1}$$

Então $k + 1 \in S$.

Usando o Princípio de Indução Matemática podemos concluir que $S = \mathbb{N}_3$, ou seja, $2n + 1 \leq 2^n$, para qualquer natural $n \geq 3$.

Segundo Princípio de Indução

Indução Completa ou Segundo Princípio de Indução:

A indução matemática pode ser generalizada da seguinte forma:

$$[P(0) \wedge \forall n ((\forall m \leq n P(m)) \Rightarrow P(\text{suc}(n)))] \Rightarrow \forall n P(n)$$

Sejam $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_m = \{l \in \mathbb{N}_0 : l \geq m\}$ e S um subconjunto de $\mathbb{N}_m$ tal que:

- ① $m \in S$;
- ② $(\forall t \in \{m, \dots, k\}, t \in S) \Rightarrow k + 1 \in S$, para qualquer $k \in \mathbb{N}_m$.

Então $S = \mathbb{N}_m$.

Exemplo

Consideremos a sucessão $(a_n)_{n \geq 0}$ definida por

$$\begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 2 \\ a_n &= 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Mostremos, usando o princípio de indução completa, que $a_n = 2^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$.

Temos que:

- ① $a_0 = 2^0$, pelo que, $0 \in S$; Para $k = 1$ temos $a_1 = 2 = 2^1$, ou seja, $1 \in S$.
- ② Seja $k \in S$ e admitamos que para todo o t tal que $0 \leq t \leq k$ se tem $t \in S$, isto é, $a_t = 2^t$.
Queremos provar que, para $k \geq 1$, $k + 1 \in S$.

Como $k \geq 1$ temos $a_k = 2^k$ e $a_{k-1} = 2^{k-1}$. Onde

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= 4a_k - 4a_{k-1} \\&= 4 \cdot 2^k - 4 \cdot 2^{k-1} \\&= 2^{k+2} - 2^{k+1} \\&= 2^{k+1}(2 - 1) \\&= 2^{k+1}.\end{aligned}$$

Logo, $k + 1 \in S$ e pelo princípio de indução completa podemos concluir que $S = \mathbb{N}_0$, ou seja, que $a_n = 2^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$.

Definição

Sejam S um conjunto indutivo e R um subconjunto de S .

Seja

$$\frac{J_1 \quad J_2 \quad \dots \quad J_n}{J}$$

uma regra de inferência que define S indutivamente e que não é um axioma.

Seja Q_i a proposição que se obtém da proposição J_i substituindo o conjunto S pelo conjunto R , para $i = 1, \dots, n$ e seja Q a proposição que se obtém da proposição J substituindo o conjunto S pelo conjunto R .

Se a proposição

$$\frac{Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_n}{Q}$$

for verdadeira em R , dizemos que

$$\frac{J_1 \quad J_2 \quad \dots \quad J_n}{J}$$

é uma **R -regra**.

Princípio de Indução Estrutural

Sejam S um conjunto indutivo e R um subconjunto de S tal que:

- ① *Os elementos básicos de S pertencem a R .*
- ② *As regras de inferência que definem indutivamente S e que não são axiomas, são R -regras.*

Então $R = S$.

Indução sobre $\mathbb{T}$

Recordemos que as regras de inferência para $\mathbb{T}$ são

$$\overline{0 \in \mathbb{T}} \quad \overline{1 \in \mathbb{T}} \quad \frac{t_1 \in \mathbb{T} \quad t_2 \in \mathbb{T}}{\text{nodo}(t_1, t_2) \in \mathbb{T}}$$

Assim, uma propriedade P é válida em $\mathbb{T}$ se:

- $P(0)$ e
- $P(1)$ e
- $\forall t_1, t_2 ((P(t_1) \wedge P(t_2)) \Rightarrow P(\text{nodo}(t_1, t_2)))$

Considere as seguintes equações:

$$\text{alt}(0) = 0$$

$$\text{alt}(1) = 0$$

$$\text{alt}(\text{nodo}(t_1, t_2)) = 1 + \max\{\text{alt}(t_1), \text{alt}(t_2)\}$$

As equações acima definem uma função, i.e. para cada árvore t existe um, e um só, número natural n tal que $\text{alt}(t) = n$.

Consideremos $R = \{t \in \mathbb{T} : \exists^1 n \in \mathbb{N}_0 : \text{alt}(t) = n\}$

Vamos demonstrar por indução estrutural que $(R = \mathbb{T})$.

- $0 \in R$ e $1 \in R$
 pois $alt(0) = 0$ e $alt(1) = 0$, logo existe um único $n \in \mathbb{N}_0$ (o zero) tal que $alt(0) = n$ e $alt(1) = n$.
 Logo $0 \in R$ e $1 \in R$.
- Para $\mathbb{T}$ temos a seguinte regra de inferência: $\frac{t_1 \in \mathbb{T} \quad t_2 \in \mathbb{T}}{nodo(t_1, t_2) \in \mathbb{T}}$

Dados $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$,

se $\exists^1 n_1 \text{ } alt(t_1) = n_1$ e $\exists^1 n_2 \text{ } alt(t_2) = n_2$

então $\exists^1 n \text{ } alt(nodo(t_1, t_2)) = n$

$[n = 1 + \max\{n_1, n_2\}]$

Então $nodo(t_1, t_2) \in R$ e, pelo Princípio de Indução Estrutural, $R = \mathbb{T}$.

Logo, podemos afirmar que a função alt está definida recursivamente pelas equações dadas.

Exemplo

Atenda-se à definição indutiva de $h : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que determina o número de 1's de uma palavra de $\mathbb{W}$.

$$\begin{cases} h(\epsilon) = 0 \\ h(\text{conc}_0(w)) = h(w) \\ h(\text{conc}_1(w)) = h(w) + 1 \end{cases} \quad \forall w \in \mathbb{W}.$$

Prove-se, por indução, que h é uma função.

Neste caso definimos $R = \{w \in \mathbb{W} : \exists^1 n \in \mathbb{N}_0, h(w) = n\}$.

Vejamos que $R = \mathbb{W}$ por indução estrutural.

Elementos básicos A palavra ϵ é o único elemento básico de $\mathbb{W}$. Uma vez que $h(\epsilon) = 0$, existe um único elemento de $\mathbb{N}_0$ (o zero) que é imagem de ϵ . Logo $\epsilon \in \mathbb{W}$.

Exemplo

Regras Em $\mathbb{W}$ temos duas regras

Vejamos que $\frac{w \in \mathbb{W}}{\text{conc}_1(w) \in \mathbb{W}}$ é uma R -regra.

HI Se $w \in R$ então existe um único elemento $p \in N_0$, tal que $h(w) = p$. Porque $h(\text{conc}_1(w)) = h(w) + 1$, então existe um único número natural r tal que $h(\text{conc}_1(w)) = r$ ($r = p + 1$).

Tese Podemos então concluir que $\text{conc}_1(w) \in R$.

Vejamos que $\frac{w \in \mathbb{W}}{\text{conc}_0(w) \in \mathbb{W}}$ é uma R -regra.

HI Se $w \in R$ então existe um único elemento $p \in N_0$, tal que $h(w) = p$. Porque $h(\text{conc}_0(w)) = h(w)$, então existe um único número natural r tal que $h(\text{conc}_0(w)) = r$ ($r = p$).

Tese Podemos então concluir que $\text{conc}_0(w) \in R$.

Assim, pelo Princípio de Indução estrutural, $R = \mathbb{W}$. Portanto h é uma função.

Exercício

- (a) Escreva equações que, para cada $t \in \mathbb{T}$, definam recursivamente $nmv(t)$ como o número máximo de vértices de t .
- (b) Mostre, por indução em $\mathbb{T}$, que nmv assim definida é uma função.