Matemática Discreta

2016/17
Grafos Eulerianos

Prof. Fátima Rodrigues
Departamento de Matemática
FCT/UNL

Baseados em slides elaborados pelo Prof. Jorge André e Prof.ª Cecília Perdigão

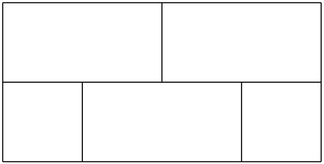
Programa

1. Parte 1 - Conjuntos e Relações e Funções
   1. Conjuntos, representações e operações básicas; conjunto das partes; cardinalidade.
   2. Relações binárias: equivalências e ordens parciais.
   3. Funções: bijecções; inversão e composição.
2. Parte 2 - Indução
   1. Definições indutivas
   2. Indução nos naturais e estrutural
   3. Primeiro e segundo princípios de indução
   4. Funções recursivas e provas por indução
3. Parte 3 - Grafos e Aplicações
   1. Generalidades
   2. Conexidade
   3. Árvores
   4. Grafos Eulerianos
   5. Matrizes e grafos

3.4.1. Grafos Eulerianos. Algoritmo de Fleury

Como já o referimos, é neste capítulo que iremos tratar de resolver o problema das pontes de Königsberg.

Uma charada muito conhecida, deste tipo de problemas, é a seguinte: A figura



pode ser desenhada através de traços contínuos sem nunca passar por cima de um traço já feito?

3.4. Grafos Eulerianos

Definição

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um multigrafo. Chamamos cadeia euleriana a uma cadeia simples contendo todos os arcos de G e ciclo euleriano a um ciclo contendo todos os arcos de G.

Se G é um multigrafo orientado, substituindo na definição "cadeia" por "caminho" obtêm-se as correspondentes definições de caminho euleriano e de circuito euleriano.

Definição

Um multigrafo diz-se euleriano se admite um ciclo euleriano e semi-euleriano se admite uma cadeia euleriana aberta.

Teorema

(i) *Um multigrafo conexo G, com $n \geq 2$ vértices, tem um ciclo euleriano se, e só se, todo o vértice de G tem grau par.*

(ii) *Um multigrafo conexo G, com $n \geq 2$ vértices, tem uma cadeia $x - y$ euleriana, com $x \neq y$ se, e só se, x e y são os únicos vértices de G com grau ímpar.*

Dem

Suponhamos que $G = (X, \mathcal{U})$ é um multigrafo conexo, com $n \geq 2$ vértices, que tem um ciclo euleriano. Seja

$$C : \qquad x_1,\ u_1,\ x_2,\ u_2, \ldots,\ x_k,\ u_m,\ x_1$$

um ciclo euleriano de G, sendo m o número de elementos da família $\mathcal{U}$. Como G é conexo e C inclui todos os arcos de G, podemos afirmar que todo o vértice de G está em C. Seja x um vértice de G e seja r o número de vezes que x ocorre na sequência $x_1,\ u_1,\ x_2,\ u_2, \ldots,\ x_k,\ u_m$.

3.4. Grafos Eulerianos

Como todos os arcos de C são distintos, podemos afirmar que

$$d(x) \geq 2r,$$

mas, C inclui todos os arcos de G, logo, $d(x) = 2r$. Concluímos então que todo o vértice de G tem grau par.

Reciprocamente, suponhamos que $G = (X, \mathcal{U})$ é um multigrafo conexo, com $n \geq 2$ vértices, em que todo o vértice tem grau par e demonstremos por indução sobre o número m de arcos, que G tem um ciclo euleriano.
Sem perda de generalidade, consideraremos que G não tem laços. Se todo o vértice tem grau par, G é conexo e $n \geq 2$ então $m \geq 2$.
Se $m = 2$ então G é isomorfo a

Suponhamos que o resultado é verdadeiro para todo o multigrafo conexo, sem laços, com $n \geq 2$ vértices, com número de arcos inferior a k, em que todo o vértice tem grau par e demonstremos que é, ainda, verdadeiro para todo o multigrafo conexo, sem laços, com $n \geq 2$ vértices, com exactamente k arcos e tendo todo o vértice grau par. Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um multigrafo verificando estas condições.

Como G é conexo, com $n \geq 2$ vértices, G não tem vértices de grau zero. Se G não tivesse um ciclo, G era uma árvore, o que implicava que existiriam dois vértices de grau 1, contrariando a hipótese de todo o vértice ter grau par.

Seja C um ciclo de G com comprimento máximo.
Suponhamos que C não inclui todos os arcos de G e seja $G' = (X,\ \mathcal{U}')$ o grafo parcial de G que se obtém eliminando em G os arcos de C. Em G', temos, $d_{G'}(x)$ é par, para todo o $x \in X$ porque se x é vértice de C, então

$$d_{G'}(x) = d_G(x) - 2k_x, \qquad\qquad \text{com } k_x \in \mathbb{N}$$

e se x não é vértice de C, então $d_{G'}(x) = d_G(x)$.
Como todo o vértice de G tem grau par, concluímos que todo o vértice de G' tem grau par. Como G é conexo e G' tem pelo menos um arco, existe um arco $u = \{x,\ y\}$ de G', com x vértice de C. Seja H a componente conexa de G' de que u faz parte. H é um multigrafo conexo, sem laços, com número de vértices superior ou igual a 2 em que todo o vértice tem grau par e com número de arcos inferior a k.

Atendendo à hipótese de indução, H tem um ciclo euleriano, que contem o vértice x,

$$C' : \qquad x,\ u'_1,\ y_1, \ldots,\ y_{r-1},\ u'_r,\ x,$$

em que $u'_i \in \mathcal{U}'$, $i = 1, \ldots, r$ e $y_j \in X$, $j = 1, \ldots, r-1$.
Porque x é vértice de C,

$$C : \qquad x,\ u_1,\ z_1, \ldots,\ z_{h-1},\ u_h,\ x$$

em que $u_i \in \mathcal{U}$, $i = 1, \ldots, h$ e $z_j \in X$, $j = 1, \ldots, h-1$. Então

$$x,\ u_1,\ z_1, \ldots,\ z_{h-1},\ u_h,\ x,\ u'_1,\ y_1, \ldots,\ y_{r-1},\ u'_r,\ x$$

é um ciclo em G mas com comprimento superior ao de C, que por hipótese tem comprimento máximo. Contradição. Logo, G tem um ciclo euleriano.

Dem(ii)
Seja $G = (X,\ \mathcal{U})$ um multigrafo conexo, com $n \geq 2$ vértices. Seja $z \notin X$.
Atenda-se a que G tem uma cadeia $x - y$ euleriana, com $x \neq y$, se, e só se, o grafo $\hat{G} = (X \cup \{z\},\ \mathcal{U} \cup \{x,\ z\} \cup \{y,\ z\})$, com $z \notin X$ tem um ciclo euleriano.
Por (i) tal sucede se, e só se, $d_{\hat{G}}(x_i)$ é par, para todo o $x_i \in X \cup \{z\}$. Como

$$d_{\hat{G}}(x) = d_G(x) + 1,$$

$$d_{\hat{G}}(y) = d_G(y) + 1,$$

$$d_{\hat{G}}(x_i) = d_G(x_i),$$

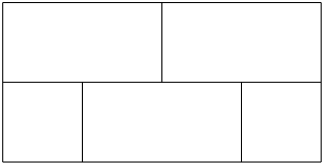
para todo o $x_i \in X \setminus \{x,\ y\}$, concluímos que G tem uma cadeia $x - y$ euleriana, com $x \neq y$, se, e só se, x e y são os únicos vértices de G com grau ímpar.

Observação:

1. Não existem multigrafos simultaneamente eulerianos e semi-eulerianos.

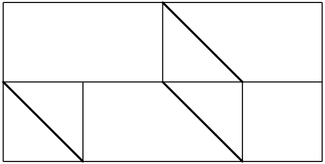
2. Se um multigrafo não conexo admite uma cadeia euleriana aberta ou um ciclo euleriano então, no máximo, uma componente conexa do multigrafo é um multigrafo não nulo e todas as outras componentes conexas são grafos nulos.

Regressando à pergunta que foi feita no início deste capítulo: Será possível desenhar a seguinte figura sem passar mais do que uma vez por cima de alguns segmentos?



3.4. Grafos Eulerianos

Construamos o seguinte grafo: os vértices correspondem ao ponto de encontro de dois segmentos de recta da figura e dois vértices são adjacentes, se os dois pontos a que correspondem estes dois vértices, na figura, estão unidos por um segmento de recta. Este grafo tem doze vértices, sendo oito deles de grau ímpar. Colocando mais três segmentos de recta na figura inicial, obtemos uma figura que representa um grafo com apenas dois vértices com grau ímpar. Logo tem uma cadeia semi-euleriana.



Teorema

(i) *Um multigrafo orientado conexo* $G = (X,\ \mathcal{U})$, *com* $n \geq 2$ *vértices, tem um circuito euleriano se, e só se,*

$$d^+(x) = d^-(x),$$

para todo o $x \in X$.

(ii) *Um multigrafo orientado conexo* $G = (X,\ \mathcal{U})$, *com* $n \geq 2$ *vértices, tem um caminho* $x - y$ *euleriano, com* $x \neq y$ *se, e só se,*

$$d^+(x) = d^-(x) + 1,$$

$$d^+(y) = d^-(y) - 1,$$

$$d^+(x_i) = d^-(x_i),$$

para todo o $x_i \in X \setminus \{x,\ y\}$.

O seguinte algoritmo permite encontrar um ciclo Euleriano num grafo Euleriano.

Algoritmo de Fleury

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um multigrafo euleriano.

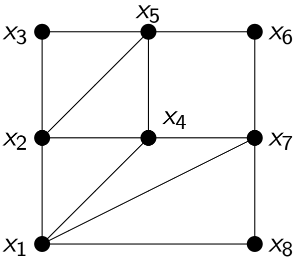
1^o Escolha um vértice x_1 de G, tal que $d(x_1) > 0$.

2^o Sendo $L: \quad x_1, \; u_1, \; x_2, \ldots, \; u_p, \; x_k$ a cadeia simples, obtida pelo processo, seja $u_{k+1} = \{x_k, x_{k+1}\} \in \mathcal{U} \setminus \{u_1, \ldots, u_k\}$ um arco incidente em x_k que não pertence a L e que, caso seja possível, não seja ponte de $G' = (X, \; \mathcal{U} \setminus \{u_1, \ldots, \; u_k\})$.

3^o Se $d_{G'}(x_{k+1}) = 1$, o algoritmo termina, caso contrário repita-se 2^o.

3.4. Grafos Eulerianos

Exemplo: Consideremos o grafo



que é euleriano pois é conexo e todos os seus vértices têm grau par. Utilizemos o algoritmo de Fleury para determinar um ciclo euleriano.