

# Matemática Discreta

2016/17

Matrizes e Grafos

Prof.<sup>a</sup> Fátima Rodrigues  
*Departamento de Matemática*  
*FCT/UNL*

*Baseados em slides elaborados pelo Prof. Jorge André e Prof.<sup>a</sup> Cecília Perdigão*

# Programa

## 1 Parte 1 - Conjuntos e Relações e Funções

- 1 Conjuntos, representações e operações básicas; conjunto das partes; cardinalidade.
- 2 Relações binárias: equivalências e ordens parciais.
- 3 Funções: bijecções; inversão e composição.

## 2 Parte 2 - Indução

- 1 Definições indutivas
- 2 Indução nos naturais e estrutural
- 3 Primeiro e segundo princípios de indução
- 4 Funções recursivas e provas por indução

## 3 Parte 3 - Grafos e Aplicações

- 1 Generalidades
- 2 Conexidade
- 3 Árvores
- 4 Grafos Eulerianos
- 5 Matrizes e grafos

## 3.6. Matrizes e Grafos

### 2.5.1. Matriz de adjacências

Uma outra forma de representar um grafo é através de uma matriz quadrada de ordem igual à ordem do grafo.

#### Definição

Chamamos *marcação dos vértices* de um grafo  $G = (X, \mathcal{U})$ , com  $|X| = n$ , a uma aplicação bijectiva  $\psi$  de  $X$  em  $\{1, \dots, n\}$ .

Um *grafo marcado* nos vértices é um par  $(G, \psi)$  em que  $G$  é um grafo e  $\psi$  é uma marcação dos vértices de  $G$ .

## 3.6. Matrizes e Grafos

### 2.5.1. Matriz de adjacências

Uma outra forma de representar um grafo é através de uma matriz quadrada de ordem igual à ordem do grafo.

#### Definição

Chamamos *marcação dos vértices* de um grafo  $G = (X, \mathcal{U})$ , com  $|X| = n$ , a uma aplicação bijectiva  $\psi$  de  $X$  em  $\{1, \dots, n\}$ .

Um *grafo marcado* nos vértices é um par  $(G, \psi)$  em que  $G$  é um grafo e  $\psi$  é uma marcação dos vértices de  $G$ .

## 3.6. Matrizes e Grafos

### 2.5.1. Matriz de adjacências

Uma outra forma de representar um grafo é através de uma matriz quadrada de ordem igual à ordem do grafo.

#### Definição

Chamamos *marcação dos vértices* de um grafo  $G = (X, \mathcal{U})$ , com  $|X| = n$ , a uma aplicação bijectiva  $\psi$  de  $X$  em  $\{1, \dots, n\}$ .

Um *grafo marcado* nos vértices é um par  $(G, \psi)$  em que  $G$  é um grafo e  $\psi$  é uma marcação dos vértices de  $G$ .

## 3.6. Matrizes e Grafos

### Definição

Seja  $G = (X, \mathcal{U})$  um digrafo marcado nos vértices, com  $(G, \psi)$  e  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Chamamos **matriz de adjacências** de  $G$ , em relação à marcação  $\psi$ , à matriz  $A(G) = [a_{ij}]$ , de ordem  $n$ , tal que

$$a_{\psi(x_i)\psi(x_j)} = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_i, x_j) \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{se } (x_i, x_j) \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

Seja  $(G, \psi)$  um grafo marcado nos vértices, com  $G = (X, \mathcal{U})$  e  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Referimo-nos à marcação  $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$  para designar a marcação  $\psi$  tal que

$$\psi(x_{i_j}) = j, \quad j = 1, \dots, n.$$

## 3.6. Matrizes e Grafos

### Definição

Seja  $G = (X, \mathcal{U})$  um digrafo marcado nos vértices, com  $(G, \psi)$  e  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Chamamos **matriz de adjacências** de  $G$ , em relação à marcação  $\psi$ , à matriz  $A(G) = [a_{ij}]$ , de ordem  $n$ , tal que

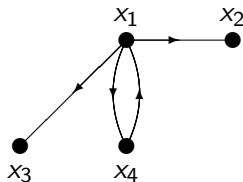
$$a_{\psi(x_i)\psi(x_j)} = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_i, x_j) \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{se } (x_i, x_j) \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

Seja  $(G, \psi)$  um grafo marcado nos vértices, com  $G = (X, \mathcal{U})$  e  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Referimo-nos à marcação  $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$  para designar a marcação  $\psi$  tal que

$$\psi(x_{i_j}) = j, \quad j = 1, \dots, n.$$

## 3.6. Matrizes e Grafos

**Exemplo:** Consideremos o digrafo  $G$



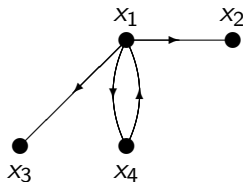
A matriz de adjacências de  $G$ , em relação às marcações  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  e  $(x_2, x_3, x_1, x_4)$  é, respectivamente, a matriz

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A'(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$



## 3.6. Matrizes e Grafos

**Exemplo:** Consideremos o digrafo  $G$

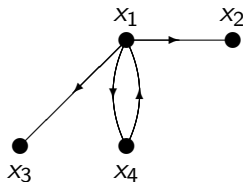


A matriz de adjacências de  $G$ , em relação às marcações  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  e  $(x_2, x_3, x_1, x_4)$  é, respectivamente, a matriz

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A'(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

## 3.6. Matrizes e Grafos

**Exemplo:** Consideremos o digrafo  $G$



A matriz de adjacências de  $G$ , em relação às marcações  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  e  $(x_2, x_3, x_1, x_4)$  é, respectivamente, a matriz

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A'(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

## 3.6. Matrizes e Grafos

As matrizes de adjacências de um digrafo em relação a marcações diferentes são, em geral, diferentes.

### Proposição

*Sejam  $A$  e  $A'$  matrizes de adjacências de um digrafo  $G = (X, \mathcal{U})$  em relação a marcações diferentes dos seus vértices. Então, existe uma matriz de permutação  $P$  tal que*

$$A' = PAP^{-1}$$

*(uma matriz de permutação de ordem  $n$  é uma matriz que se obtém da matriz identidade de ordem  $n$  efectuando uma troca nas suas linhas).*

## 3.6. Matrizes e Grafos

As matrizes de adjacências de um digrafo em relação a marcações diferentes são, em geral, diferentes.

### Proposição

*Sejam  $A$  e  $A'$  matrizes de adjacências de um digrafo  $G = (X, \mathcal{U})$  em relação a marcações diferentes dos seus vértices. Então, existe uma matriz de permutação  $P$  tal que*

$$A' = PAP^{-1}$$

*(uma matriz de permutação de ordem  $n$  é uma matriz que se obtém da matriz identidade de ordem  $n$  efectuando uma troca nas suas linhas).*

## 3.6. Matrizes e Grafos

### Observação:

- 1 Sendo  $G = (X, \mathcal{U})$  um digrafo com  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , referimos **marcação usual** dos vértices de  $G$ , à marcação  $(x_1, \dots, x_n)$ . A matriz de adjacências de  $G$ , em relação à marcação usual, é a matriz  $A = [a_{ij}]$  em que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_i, x_j) \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{se } (x_i, x_j) \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

## 3.6. Matrizes e Grafos

- 2 Através da matriz de adjacências  $A = [a_{ij}]$  de um digrafo  $G$ , em relação à marcação  $(x_1, \dots, x_n)$ , podemos determinar o grau exterior e o grau interior de cada vértice de  $G$ .

$$d^+(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij},$$

isto é, é a soma dos elementos da linha  $i$  de  $A$ , ou equivalentemente, o número de elementos da linha  $i$  que são iguais a 1, e

$$d^-(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji},$$

isto é, é a soma dos elementos da coluna  $i$  de  $A$ .

## 3.6. Matrizes e Grafos

- 2 Através da matriz de adjacências  $A = [a_{ij}]$  de um digrafo  $G$ , em relação à marcação  $(x_1, \dots, x_n)$ , podemos determinar o grau exterior e o grau interior de cada vértice de  $G$ .

$$d^+(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij},$$

isto é, é a soma dos elementos da linha  $i$  de  $A$ , ou equivalentemente, o número de elementos da linha  $i$  que são iguais a 1, e

$$d^-(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji},$$

isto é, é a soma dos elementos da coluna  $i$  de  $A$ .

## 3.6. Matrizes e Grafos

**Exemplo:** Considerando o grafo do exemplo anterior, cuja matriz de adjacências em relação à marcação  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , dos seus vértices é

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

temos

$$\sum_{j=1}^4 a_{1j} = 3 = d^+(x_1)$$

e

$$\sum_{j=1}^4 a_{j3} = 1 = d^-(x_3).$$



## 3.6. Matrizes e Grafos

### Teorema

Seja  $G = (X, \mathcal{U})$  um digrafo marcado nos vértices e  $A = [a_{ij}]$  a matriz de adjacências de  $G$ , em relação à marcação usual  $(x_1, \dots, x_n)$ . Então, na matriz

$$AA^T = [s_{ij}]$$

$s_{ij}$  representa o número de sucessores simultâneos de  $x_i$  e  $x_j$ , isto é,

$$s_{ij} = |\Gamma^+(x_i) \cap \Gamma^+(x_j)|.$$

## 3.6. Matrizes e Grafos

### Definição

Seja  $G = (X, \mathcal{U})$  um **grafo simples** marcado nos vértices, com  $(G, \psi)$  e  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Chamamos **matriz de adjacências** de  $G$ , em relação à marcação  $\psi$ , à matriz  $A(G) = [a_{ij}]$ , de ordem  $n$ , tal que

$$a_{\psi(x_i)\psi(x_j)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \text{ ou } \{x_i, x_j\} \notin \mathcal{U} \\ 1 & \text{se } \{x_i, x_j\} \in \mathcal{U} \end{cases}$$

### Observação:

- 1 A matriz de adjacências de um grafo simples tem todos os elementos diagonais nulos.
- 2 A matriz de adjacências de um grafo simples tem a propriedade de ser simétrica, isto é,  $A = A^T$ .

## 3.6. Matrizes e Grafos

### Definição

Seja  $G = (X, \mathcal{U})$  um **grafo simples** marcado nos vértices, com  $(G, \psi)$  e  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Chamamos **matriz de adjacências** de  $G$ , em relação à marcação  $\psi$ , à matriz  $A(G) = [a_{ij}]$ , de ordem  $n$ , tal que

$$a_{\psi(x_i)\psi(x_j)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \text{ ou } \{x_i, x_j\} \notin \mathcal{U} \\ 1 & \text{se } \{x_i, x_j\} \in \mathcal{U} \end{cases}$$

### Observação:

- 1 A matriz de adjacências de um grafo simples tem todos os elementos diagonais nulos.
- 2 A matriz de adjacências de um grafo simples tem a propriedade de ser simétrica, isto é,  $A = A^T$ .

## 3.6. Matrizes e Grafos

### Definição

Seja  $G = (X, \mathcal{U})$  um **grafo simples** marcado nos vértices, com  $(G, \psi)$  e  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Chamamos **matriz de adjacências** de  $G$ , em relação à marcação  $\psi$ , à matriz  $A(G) = [a_{ij}]$ , de ordem  $n$ , tal que

$$a_{\psi(x_i)\psi(x_j)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \text{ ou } \{x_i, x_j\} \notin \mathcal{U} \\ 1 & \text{se } \{x_i, x_j\} \in \mathcal{U} \end{cases}$$

### Observação:

- 1 A matriz de adjacências de um grafo simples tem todos os elementos diagonais nulos.
- 2 A matriz de adjacências de um grafo simples tem a propriedade de ser simétrica, isto é,  $A = A^T$ .

## 3.6. Matrizes e Grafos

### Teorema

*Seja  $G$  um grafo simples.*

*$G$  é desconexo se, e só se, existe uma marcação dos vértices em relação à qual a matriz de adjacências de  $G$  tem a forma*

$$\begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{bmatrix}$$

*sendo  $A_i$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ , uma matriz quadrada e  $k \geq 2$ .*

## 3.6. Matrizes e Grafos

### Teorema

Seja  $A = [a_{ij}]$  a matriz de adjacências de um grafo simples  $G = (X, \mathcal{U})$ , em relação à marcação usual  $(x_1, \dots, x_n)$ . Então, na matriz

$$A^k = [a_{ij}^{(k)}], \quad \text{com } k \in \mathbb{N},$$

$a_{ij}^{(k)}$  é igual ao número de cadeias  $x_i - x_j$  com comprimento  $k$ , existentes em  $G$ .

**Observação:** Substituindo no Teorema anterior, “grafo simples” por “digrafo” e “cadeia” por “caminho”, obtemos um resultado válido.

## 3.6. Matrizes e Grafos

### Teorema

Seja  $A = [a_{ij}]$  a matriz de adjacências de um grafo simples  $G = (X, \mathcal{U})$ , em relação à marcação usual  $(x_1, \dots, x_n)$ . Então, na matriz

$$A^k = [a_{ij}^{(k)}], \quad \text{com } k \in \mathbb{N},$$

$a_{ij}^{(k)}$  é igual ao número de cadeias  $x_i - x_j$  com comprimento  $k$ , existentes em  $G$ .

**Observação:** Substituindo no Teorema anterior, “grafo simples” por “digrafo” e “cadeia” por “caminho”, obtemos um resultado válido.

## 3.6. Matrizes e Grafos

**Exemplo:** Com o exemplo anterior, determinemos o número de caminhos  $x_4 - x_3$  de comprimento 2, existentes em  $G$ . Ora,

$$A(G)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como esta matriz, tem na posição  $(4, 3)$  um elemento não nulo, usando o Teorema, existe um, e um só, caminho de  $x_4 - x_3$ , de comprimento 2, em  $G$ .



## 3.6. Matrizes e Grafos

**Exemplo:** Com o exemplo anterior, determinemos o número de caminhos  $x_4 - x_3$  de comprimento 2, existentes em  $G$ . Ora,

$$A(G)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como esta matriz, tem na posição  $(4, 3)$  um elemento não nulo, usando o Teorema, existe um, e um só, caminho de  $x_4 - x_3$ , de comprimento 2, em  $G$ .

## 3.6. Matrizes e Grafos

### Definição

Seja  $G = (X, U)$  um grafo simples. Chama-se **matriz de alcançabilidade** de  $G$  em relação à marcação usual  $(x_1, \dots, x_n)$  dos seus vértices, à matriz  $R(G) = [r_{ij}]$  de ordem  $n = |X|$ , tal que  $r_{ij}$  é

$$\begin{cases} 1 & \text{se existe em } G \text{ uma cadeia } x_i - x_j \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

### Proposição

*Um grafo simples é conexo se, e só se, a sua matriz de alcançabilidade tem todos os elementos iguais a 1.*

## 3.6. Matrizes e Grafos

### Definição

Seja  $G = (X, U)$  um grafo simples. Chama-se **matriz de alcançabilidade** de  $G$  em relação à marcação usual  $(x_1, \dots, x_n)$  dos seus vértices, à matriz  $R(G) = [r_{ij}]$  de ordem  $n = |X|$ , tal que  $r_{ij}$  é

$$\begin{cases} 1 & \text{se existe em } G \text{ uma cadeia } x_i - x_j \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

### Proposição

Um grafo simples é conexo se, e só se, a sua matriz de alcançabilidade tem todos os elementos iguais a 1.

## 3.6. Matrizes e Grafos

### Definição

Chama-se **matriz booleana associada** a uma matriz  $M = [m_{ij}]$  cujos elementos são inteiros não negativos, à matriz  $M_B = [m'_{ij}]$  tal que  $m'_{ij}$  é

$$\begin{cases} 1 & \text{se } m_{ij} > 0 \\ 0 & \text{se } m_{ij} = 0 \end{cases}$$

### Teorema

Seja  $G = (X, U)$  um grafo simples com matriz de adjacências  $A$ , em relação à marcação usual  $(x_1, \dots, x_n)$  dos seus vértices. Então a matriz de alcançabilidade de  $G$ , em relação à mesma marcação é a matriz

$$R = (I_n + A + A^2 + \dots + A^{n-1})_B.$$

## 3.6. Matrizes e Grafos

### Definição

Chama-se **matriz booleana associada** a uma matriz  $M = [m_{ij}]$  cujos elementos são inteiros não negativos, à matriz  $M_B = [m'_{ij}]$  tal que  $m'_{ij}$  é

$$\begin{cases} 1 & \text{se } m_{ij} > 0 \\ 0 & \text{se } m_{ij} = 0 \end{cases}$$

### Teorema

Seja  $G = (X, U)$  um grafo simples com matriz de adjacências  $A$ , em relação à marcação usual  $(x_1, \dots, x_n)$  dos seus vértices. Então a matriz de alcançabilidade de  $G$ , em relação à mesma marcação é a matriz

$$R = (I_n + A + A^2 + \dots A^{n-1})_B.$$

## 3.6. Matrizes e Grafos

### Definição

Seja  $G = (X, U)$  um digrafo. Chama-se **matriz de alcançabilidade** de  $G$  em relação à marcação usual  $(x_1, \dots, x_n)$  dos seus vértices, à matriz  $R(G) = [r_{ij}]$  de ordem  $n = |X|$ , tal que  $r_{ij}$  é

$$\begin{cases} 1 & \text{se existe em } G \text{ um caminho } x_i - x_j \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

### Proposição

Um digrafo é conexo se, e só se, a matriz de alcançabilidade do seu grafo subjacente tem todos os elementos iguais a 1.

## 3.6. Matrizes e Grafos

### Definição

Seja  $G = (X, U)$  um digrafo. Chama-se **matriz de alcançabilidade** de  $G$  em relação à marcação usual  $(x_1, \dots, x_n)$  dos seus vértices, à matriz  $R(G) = [r_{ij}]$  de ordem  $n = |X|$ , tal que  $r_{ij}$  é

$$\begin{cases} 1 & \text{se existe em } G \text{ um caminho } x_i - x_j \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

### Proposição

Um digrafo é conexo se, e só se, a matriz de alcançabilidade do seu grafo subjacente tem todos os elementos iguais a 1.

## 3.6. Matrizes e Grafos

### Proposição

*Um digrafo é fortemente conexo se, e só se, a sua matriz de alcançabilidade tem todos os elementos iguais a 1.*

### Teorema

*Seja  $G = (X, U)$  um digrafo com matriz de alcançabilidade  $R$ , em relação à marcação usual  $(x_1, \dots, x_n)$  dos seus vértices. Então os vértices da componente fortemente conexa a que pertence o vértice  $x_i$  são os vértices  $x_j$  correspondentes a  $r_{ij} = r_{ji} = 1$ .*



## 3.6. Matrizes e Grafos

### Proposição

*Um digrafo é fortemente conexo se, e só se, a sua matriz de alcançabilidade tem todos os elementos iguais a 1.*

### Teorema

*Seja  $G = (X, U)$  um digrafo com matriz de alcançabilidade  $R$ , em relação à marcação usual  $(x_1, \dots, x_n)$  dos seus vértices. Então os vértices da componente fortemente conexa a que pertence o vértice  $x_i$  são os vértices  $x_j$  correspondentes a  $r_{ij} = r_{ji} = 1$ .*

## 3.6. Matrizes e Grafos

### Definição

Chama-se **marcação dos arcos** de um grafo  $G = (X, U)$ , com  $|U| = m$ , a uma aplicação bijectiva  $\varphi : U \longrightarrow \{1, \dots, m\}$ . Um **grafo marcado nos vértices e nos arcos** é um terno  $(G, \psi, \varphi)$ , onde  $G$  é um grafo,  $\psi$  é uma marcação dos vértices de  $G$  e  $\varphi$  é uma marcação dos arcos de  $G$ .

### Definição

Seja  $G = (X, U)$  um digrafo marcado nos vértices e nos arcos, sendo  $(x_1, \dots, x_n)$  e  $(u_1, \dots, u_m)$ , respectivamente, a marcação dos vértices e a marcação dos arcos de  $G$ . Chama-se **matriz de incidências** de  $G$  em relação a tais marcações à matriz  $B(G) = [b_{ij}]$ , do tipo  $n \times m$ , tal que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i \text{ é a extremidade inicial do arco } u_j \\ -1 & \text{se } x_i \text{ é a extremidade final do arco } u_j \\ 0 & \text{se } x_i \text{ não é extremidade arco } u_j \end{cases}$$

## 3.6. Matrizes e Grafos

### Definição

Chama-se **marcação dos arcos** de um grafo  $G = (X, U)$ , com  $|U| = m$ , a uma aplicação bijectiva  $\varphi : U \longrightarrow \{1, \dots, m\}$ . Um **grafo marcado nos vértices e nos arcos** é um terno  $(G, \psi, \varphi)$ , onde  $G$  é um grafo,  $\psi$  é uma marcação dos vértices de  $G$  e  $\varphi$  é uma marcação dos arcos de  $G$ .

### Definição

Seja  $G = (X, U)$  um digrafo marcado nos vértices e nos arcos, sendo  $(x_1, \dots, x_n)$  e  $(u_1, \dots, u_m)$ , respectivamente, a marcação dos vértices e a marcação dos arcos de  $G$ . Chama-se **matriz de incidências** de  $G$  em relação a tais marcações à matriz  $B(G) = [b_{ij}]$ , do tipo  $n \times m$ , tal que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i \text{ é a extremidade inicial do arco } u_j \\ -1 & \text{se } x_i \text{ é a extremidade final do arco } u_j \\ 0 & \text{se } x_i \text{ não é extremidade arco } u_j \end{cases}$$

## 3.6. Matrizes e Grafos

### Definição

Seja  $G = (X, U)$  um grafo simples marcado nos vértices e nos arcos, sendo  $(x_1, \dots, x_n)$  e  $(u_1, \dots, u_m)$ , respectivamente, a marcação dos vértices e a marcação dos arcos de  $G$ . Chama-se **matriz de incidências** de  $G$  em relação a tais marcações à matriz  $B(G) = [b_{ij}]$ , do tipo  $n \times m$ , tal que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i \text{ é extremidade do arco } u_j \\ 0 & \text{se } x_i \text{ não é extremidade arco } u_j \end{cases}$$

Observe-se:

- a partir da matriz de incidências de um digrafo é possível determinar o grau exterior e interior de cada um dos vértices do grafo
- a partir da matriz de incidências de um grafo simples é possível determinar o grau de cada um dos vértices do grafo.

( Como?)

## 3.6. Matrizes e Grafos

### Definição

Seja  $G = (X, U)$  um grafo simples marcado nos vértices e nos arcos, sendo  $(x_1, \dots, x_n)$  e  $(u_1, \dots, u_m)$ , respectivamente, a marcação dos vértices e a marcação dos arcos de  $G$ . Chama-se **matriz de incidências** de  $G$  em relação a tais marcações à matriz  $B(G) = [b_{ij}]$ , do tipo  $n \times m$ , tal que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i \text{ é extremidade do arco } u_j \\ 0 & \text{se } x_i \text{ não é extremidade arco } u_j \end{cases}$$

Observe-se:

- a partir da matriz de incidências de um digrafo é possível determinar o grau exterior e interior de cada um dos vértices do grafo
- a partir da matriz de incidências de um grafo simples é possível determinar o grau de cada um dos vértices do grafo.

( Como?)