

Matemática Discreta

2017/2018
Conjuntos

Fátima Rodrigues
Departamento de Matemática
FCT/UNL

Baseados em textos e slides elaborados por professores do Departamento de Matemática

Programa

① Parte 1 - Conjuntos e Relações e Funções

- ① Conjuntos, representações e operações básicas; conjunto das partes; cardinalidade.
- ② Relações binárias: equivalências e ordens parciais.
- ③ Funções: bijecções; inversão e composição.

② Parte 2 - Indução

- ① Definições indutivas
- ② Indução nos naturais e estrutural
- ③ Primeiro e segundo princípios de indução
- ④ Funções recursivas e provas por indução

③ Parte 3 - Grafos e Aplicações

- ① Generalidades
- ② Conexidade
- ③ Árvores
- ④ Grafos Eulerianos
- ⑤ Matrizes e grafos

Avaliação em Matemática Discreta

Modo de avaliação de conhecimentos: **exame** final ou avaliação teórico-prática (**três testes**).

Para aceder aos testes é necessário (para cada um deles) fazer PRÉ-INSCRIÇÃO no CLIP. Para obter aprovação na disciplina é necessário obter FREQUÊNCIA.

Para a realização do teste o aluno precisa de trazer consigo, no dia do teste, um caderno de exame em branco.

Frequência: presença, no mínimo, em dois terços das aulas práticas leccionadas.

Avaliação em Matemática Discreta

Cada um dos testes é classificado numa escala de 0 a 20, sendo exigida no 3º teste a **classificação mínima de 6 valores**.

Sempre que a classificação mínima no 3º teste seja atingida, **a classificação final corresponde à média aritmética** (arredondada às unidades) das classificações obtidas nos três testes. Para alunos com frequência, uma classificação final igual ou superior a dez valores corresponde a aprovação na UC.

Em caso de não aprovação por testes o aluno, tendo frequência, pode aceder ao exame final.

Sempre que a classificação (dos testes ou do exame) seja superior ou igual a 18 valores pode ser requerida ao aluno uma prova suplementar, caso não a realize será atribuída a classificação de 17 valores.

Conjuntos - Definições e exemplos

Um **conjunto** é uma "coleção" de objectos.

- Os objectos que formam um conjunto designam-se por **elementos**, **membros** ou, por vezes, **pontos**.
- Usualmente utilizamos letras maiúsculas para representar conjuntos e minúsculas para representar os seus elementos.
- Para representar que a é um elemento do conjunto A escrevemos $a \in A$ e lemos " a pertence a A " ou " a é elemento de A ".
- Sejam A e B dois conjuntos. Recordemos que:
 - A está **contido** em B , e denotamos por $A \subseteq B$, se todo o elemento de A é também um elemento de B , i.e. $\forall x \in A \ x \in B$;
 - A e B são **iguais** se têm os mesmos elementos, i.e. $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.
 - Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$.

Notação:

- $\emptyset$ ou $\{\}$ representa o conjunto vazio, isto é, o conjunto sem elementos.
- $a \notin A$, abrevia $\sim (a \in A)$;
- $A \not\subseteq B$ abrevia $\sim (A \subseteq B)$;
- $A \subset B$ abrevia $A \subseteq B \wedge A \neq B$.

Exemplos

- 1 $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ é o conjunto dos números naturais.
- 2 $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ é o conjunto dos números inteiros não negativos.
- 3 $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros.
- 4 $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números racionais.
- 5 $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais.
- 6 $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos.

Exemplos

- $\{1, 3, 5, 6, 8\} = \{6, 8, 3, 5, 1\}$;
- Se $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ então $A \subset B$;
- Para $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, podemos afirmar que $3 \in C$ mas $4 \notin C$;
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$;
- $0 \notin \mathbb{N}$ mas $0 \in \mathbb{Z}$;
- $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$ mas $\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$;
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ mas $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

1.1 Conjuntos - Representação de conjuntos

Se S é um conjunto, os elementos de S que verificam uma determinada propriedade ψ , isto é,

$$\{n \in S : \psi(n)\} \text{ é um conjunto.}$$

*Dizemos que o conjunto assim definido está representado em **compreensão**.*

Exemplo

Consideremos $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 4\}$. O conjunto A está representado em compreensão.

*Quando um conjunto tem um número finito de elementos podemos representá-lo explicitando os seus elementos. Neste caso dizemos que o conjunto está representado em **extensão**.*

Exemplo

Neste caso, o conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 4\}$ ao ser representado por $A = \{1, 2, 3, 4\}$ fica representado em extensão.

*Designam-se por **diagramas de Venn*** os diagramas usados para simbolizar graficamente propriedades e problemas relativos aos conjuntos e sua teoria.*

** (diagramas que consistem em curvas fechadas simples desenhadas sobre um plano, de forma a simbolizar os conjuntos e permitir a representação das relações de pertença entre conjuntos e seus elementos)*

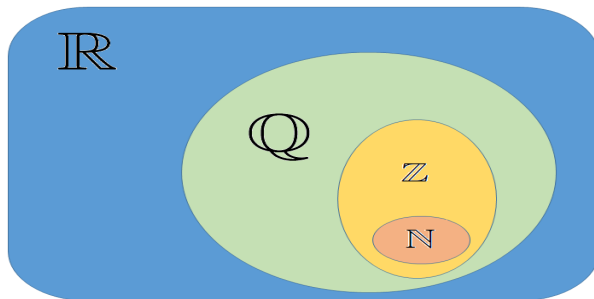
1.1 Conjuntos - Representação de conjuntos

Exemplo

A propriedade anteriormente referida,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

pode ilustrar-se, utilizando diagramas de Venn, da seguinte forma:

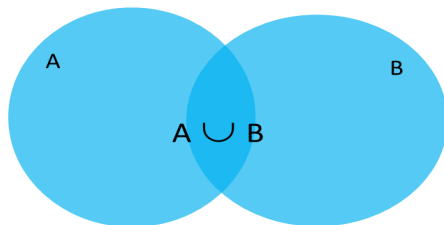


Conjuntos: Operações básicas

Sejam A e B subconjuntos de um conjunto S .

- A **união** de A com B é o conjunto

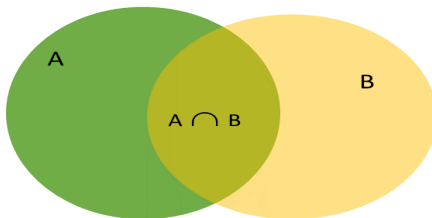
$$A \cup B = \{x \in S : x \in A \text{ ou } x \in B\};$$



Conjuntos: Operações básicas

- A *intersecção* de A com B é o conjunto

$$A \cap B = \{x \in S : x \in A \text{ e } x \in B\};$$

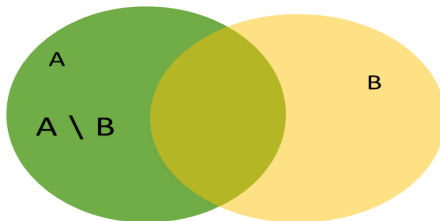


Conjuntos: Operações básicas

- A *diferença* de A e B (ou o *complementar de B em A*), representada por $A - B$ (ou $A \setminus B$), é o conjunto

$$\{x \in S : x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

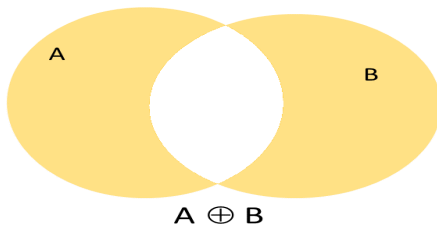
A' ou A^c denota $S \setminus A$.



Conjuntos: Operações básicas

- A *diferença simétrica* entre os conjuntos A e B , representada por $A \oplus B$, é o conjunto

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



Conjuntos: Propriedades das operações

PROPRIEDADES	UNIÃO
Comutatividade	$A \cup B = B \cup A$
Associatividade	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Idempotência	$A \cup A = A$
Existência de elemento neutro	$A \cup \emptyset = A = \emptyset \cup A$
Existência de elemento absorvente	$A \cup S = S = S \cup A$

Conjuntos: Propriedades das operações

PROPRIEDADES	INTERSECÇÃO
Comutatividade	$A \cap B = B \cap A$
Associatividade	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Idempotência	$A \cap A = A$
Existência de elemento neutro	$A \cap S = A = S \cap A$
Existência de elemento absorvente	$A \cap \emptyset = \emptyset = \emptyset \cap A$

Conjuntos: Propriedades das operações

Distributividade da intersecção em relação à união, *respectivamente à direita e à esquerda*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A).$$

Distributividade da união em relação à intersecção, *respectivamente à direita e à esquerda*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A).$$

1.1 Conjuntos: Propriedades das operações

Dupla complementação

$$(A^c)^c = A.$$

Primeiras leis de De Morgan para conjuntos

Lei do complementar da intersecção: O complementar da intersecção de conjuntos é igual à união dos complementares, isto é,

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Lei do complementar da união: O complementar da união de conjuntos é igual à intersecção dos complementares, isto é,

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Conjuntos: Propriedades das operações

Observação

- Note-se que as propriedades atrás enunciadas bem como outras propriedades sobre conjuntos **não podem** ser demonstradas com base em diagramas de Venn.
- Os diagramas de Venn são úteis para ajudar a perceber a propriedade de conjuntos a demonstrar mas apenas se conseguem utilizar de modo eficaz quando o número de conjuntos envolvidos não é muito grande (3 ou 4 no máximo).
- Para provar propriedades sobre conjuntos podemos construir a respectiva **tabela de verdade** ou fazer a **demonstração formal**.

Conjuntos: Propriedades das operações

Exemplo

Dado um subconjunto A de S , mostre que

$$A \cap A = A.$$

Tabela de verdade

A	$\cap$	A	$=$	A
1	1	1	1	1
0	0	0	1	0
1	2	1	3	1

Demonstração formal: Dado $x \in S$ arbitrário, temos:

$$x \in A \cap A \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in A) \Leftrightarrow x \in A.$$

Logo, como dois conjuntos são iguais se têm os mesmos elementos,
 $A \cap A = A.$

Conjuntos: Conjunto das partes

Podemos deparar-nos com conjuntos cujos elementos também são conjuntos.

Exemplo

$$\underbrace{\{\{\text{encarnado}, \text{verde}, \text{amarelo}\}\}}_{\text{cores da bandeira de Portugal}} \quad \underbrace{\{\{\text{encarnado}, \text{amarelo}\}\}}_{\text{cores da bandeira de Espanha}}$$

- Dado um conjunto S ao conjunto $\mathcal{P}(S) = \{A : A \subseteq S\}$ chamamos o **conjunto das partes** de S .

Exemplos

- 1 Dado $S = \{1, 2\}$ $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.
- 2 Dado $S = \{\text{encarnado}(E), \text{verde}(V), \text{amarelo}(A)\}$,
 $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{E\}, \{V\}, \{A\}, \{E, V\}, \{E, A\}, \{V, A\}, \{E, V, A\}\}$.

1.1 Conjuntos: Conjunto das partes

Dado um conjunto S , seja A um conjunto cujos elementos são subconjuntos de S . Definimos:

- $\bigcup A = \{a \in S : \exists X \in A \quad a \in X\}$
- $\bigcap A = \{a \in S : \forall X \in A \quad a \in X\}$

Se considerarmos I um conjunto arbitrário de índices e representarmos $A = \{A_i \subseteq S : i \in I\}$ então podemos escrever

- $\bigcup A = \bigcup_{i \in I} A_i$
- $\bigcap A = \bigcap_{i \in I} A_i$

Exemplo

Se $S = \{0, 1, 2\}$ e $A = \{\{2\}, \{0, 2\}\}$ temos

$$\bigcup A = \{2\} \cup \{0, 2\} = \{0, 2\}$$

$$\bigcap A = \{2\} \cap \{0, 2\} = \{2\}$$

Exemplo

Se $S = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{N}$ e $A = \{A_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \subseteq \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ temos

$$\bigcup A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = [-1, 1]$$

$$\bigcap A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$$

1.1 Conjuntos: Conjunto das partes

Seja S um conjunto. Um conjunto $A \subseteq \mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\}$ é uma *partição de S* se cada elemento de S pertence a um, e um só, elemento de A .

Numa partição A de S os elementos de A são conjuntos disjuntos dois a dois e $\bigcup A = S$.

Exemplo

Se $S = \{0, 1, 2\}$, temos

$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$. Considerando os conjuntos

$$A_1 = \{\{1\}, \{0, 2\}\}$$

$$A_2 = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$$

$$A_3 = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 2\}\}$$

$$A_4 = \{\{1\}, \{2\}\}$$

Os conjuntos A_1 e A_2 são partições de S mas os conjuntos A_3 e A_4 não são partições de S .

Conjuntos: Produto cartesiano

Definição

Dado um conjunto S e $a, b \in S$, o **par ordenado** formado por a e b é o conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ que denotamos por (a, b) .

Exemplo

$(1, 2) = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ e $(2, 1) = \{\{2\}, \{1, 2\}\}$, logo $(1, 2) \neq (2, 1)$.

Proposição

Dado um conjunto S e $a, b, c, d \in S$, temos que $(a, b) = (c, d)$ se, e só se, $a = c$ e $b = d$.

Definição

O **produto cartesiano** de dois conjuntos A e B é o conjunto de pares ordenados

$$A \times B = \{(a, b) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Conjuntos: Produto cartesiano

Observação

As definições anteriores podem ser generalizadas para qualquer número natural $n > 2$, da seguinte forma:

- $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, (a_2, (\dots, (a_{n-1}, a_n) \dots)))$;
- $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n =$
 $= \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \subseteq \mathcal{P}(\cup_{1 \leq i \leq n} A_i) : a_i \in A_i \wedge i \in \{1, \dots, n\}\}$.
- A^n abrevia $A \times A \times \dots \times A$ (n vezes).

Conjuntos: Cardinalidade

- O número de elementos de um conjunto S é designado por **cardinalidade** de S e representa-se por $|S|$ ou por $\#S$.
- Um conjunto diz-se **finito** se tiver cardinalidade finita.

Exemplo

- 1 $|\emptyset| = 0$
- 2 Seja $\mathbb{Z}_n = \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq n\}$, $|\mathbb{Z}_n| = n$

Proposição

Qualquer subconjunto A de um conjunto finito S é finito e tem-se $|A| \leq |S|$.

Questões:

Se $|S| = n$, qual é a cardinalidade de $\mathcal{P}(S)$?

Se $|A| = m$ e $|B| = n$, qual é a cardinalidade de $A \times B$?

1.1 Conjuntos: Cardinalidade

Teorema

Se S é um conjunto finito tal que $|S| = n$, então $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$.

Demonstraremos este teorema, mais tarde, por indução.

Teorema

Se A e B são conjuntos finitos tais que $|A| = m$ e $|B| = n$, então $|A \times B| = m \times n$.

Os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são conjuntos infinitos.

*Representamos por $\aleph_0$ a cardinalidade de $\mathbb{N}$ e por c **cardinal do contínuo** a cardinalidade de $\mathbb{R}$.*

- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$.
- $\aleph_0 < c$.

Observamos que conjuntos infinitos não têm todos a mesma cardinalidade.