

Matemática Discreta

2017/2018
Relações binárias

Fátima Rodrigues
Departamento de Matemática
FCT/UNL

Baseados em textos e slides elaborados por professores do Departamento de Matemática

Programa

① Parte 1 - Conjuntos e Relações e Funções

- ① Conjuntos, representações e operações básicas; conjunto das partes; cardinalidade.
- ② Relações binárias: equivalências e ordens parciais.
- ③ Funções: bijecções; inversão e composição.

② Parte 2 - Indução

- ① Definições indutivas
- ② Indução nos naturais e estrutural
- ③ Primeiro e segundo princípios de indução
- ④ Funções recursivas e provas por indução

③ Parte 3 - Grafos e Aplicações

- ① Generalidades
- ② Conexidade
- ③ Árvores
- ④ Grafos Eulerianos
- ⑤ Matrizes e grafos

1.2 Relações Binárias

Definição

Seja X um conjunto. Chamamos **relação binária** sobre X a todo o subconjunto de $X \times X$.

Mais geralmente, uma **relação n -ária** ($n \in \mathbb{N}$) sobre X é um subconjunto de X^n .

Exemplos

- 1 Seja $X = \{1, 2, 3\}$. O conjunto $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ é uma relação binária sobre X .
- 2 Sejam $X = \{1, 2, 3, 4\}$. O conjunto $R = \{(x, y) \in X^2 \mid x + y \leq 5\}$ é uma relação binária sobre X .

Notação

Sejam X um conjunto e R uma relação binária sobre X . Dado um par $(x, y) \in X \times X$, escrevemos também **xRy** para designar que $(x, y) \in R$.

Definição

Sejam X e Y dois conjuntos. Uma **relação de X em Y** é um subconjunto de $X \times Y$. (No caso particular em que $X = Y$ temos uma relação binária sobre X .)

Seja R uma relação de X em Y . Chamamos **domínio** de R ao conjunto

$$\text{dom}R = \{x \in X \mid (\exists y \in Y) (x, y) \in R\},$$

e **imagem** de R ao conjunto

$$\text{im}R = \{y \in Y \mid (\exists x \in X) (x, y) \in R\}.$$

A **relação inversa** de R é a relação R^{-1} de Y em X definida por

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}.$$

A **relação composta** da relação R de X em Y com a relação S de Y em Z é a relação $S \circ R$ de X em Z definida por

$$S \circ R = \{(x, z) \mid (\exists a \in Y) (x, a) \in R \text{ e } (a, z) \in S\}.$$

Exemplo

Sobre o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, considere as relações

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 5), (1, 6)\}$$

$$\text{e } R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5)\}.$$

O *domínio de S* é o conjunto $\{1, 2\}$.

A *imagem de R* é o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

A *relação inversa de S*, S^{-1} , será dada pela troca dos elementos nos pares ordenados que definem S .

Assim temos $S^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (5, 2), (6, 1)\}$.

A *relação composta*, $R \circ S$ pode obter-se usando a seguinte tabela:

S	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,5)$	$(1,6)$
R	$(1,1)$	$(2,2) (2,3)$	$(5,4) (5,5) (5,6)$	$(6,4) (6,5)$
$R \circ S$	$(1,1)$	$(1,2) (1,3)$	$(2,4) (2,5) (2,6)$	$(1,4) (1,5)$

Assim $R \circ S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (1, 4), (1, 5)\}$.

Representação de uma relação binária

Seja R uma relação binária sobre um conjunto finito $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

- ① Através de uma **matriz de adjacências**:

a matriz de adjacências de R é a matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\{0, 1\})$ definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_i, x_j) \in R \\ 0 & \text{se } (x_i, x_j) \notin R \end{cases}$$

- ② Através de um **diagrama**:

os elementos de X são representados por pontos e dois pontos do diagrama que representam x_i e x_j estão unidos por uma seta, com orientação de x_i para x_j , se $(x_i, x_j) \in R$.

Exemplo

Sejam $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e

$R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 1), (4, 4)\}$. A matriz das adjacências de R (considerando $x_i = i$, $i = 1, 2, 3, 4$) é a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \downarrow \quad \uparrow \\ \bullet \\ 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} \downarrow \\ \bullet \\ 3 \end{array} \end{array}$$

é um diagrama que representa R .

Se R é relação binária em $X = \{1, 2, 3, 4\}$ dada pela matriz das adjacências de R (considerando $x_i = i$, $i = 1, 2, 3, 4$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então a relação R é $\{(1, 1), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$.

Definição

Dizemos que uma relação binária R sobre X é:

- **reflexiva** se $(\forall x \in X) xRx$;
- **irreflexiva** se $(\forall x \in X) (x, x) \notin R$;
- **simétrica** se $(\forall x, y \in X) xRy \Rightarrow yRx$;
- **anti-simétrica** se $(\forall x, y \in X) xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$;
- **transitiva** se $(\forall x, y, z \in X) xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

Definição

Uma relação binária reflexiva, simétrica e transitiva diz-se uma **relação de equivalência**.

Exemplos

- Seja $X = \{1, 2, 3, 4\}$. A relação $R = \{(1, 1), (1, 2), (4, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 4), (2, 1), (4, 4)\}$ não é uma relação de equivalência.

- A relação R definida em $\mathbb{R}$ por, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$,

$$xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2,$$

é uma relação de equivalência.

- Em $\mathbb{Z}$ a relação $\sim$ definida por, para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$m \sim n \Leftrightarrow |m| = |n|,$$

é uma relação de equivalência.

- Sejam X um conjunto e $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$. Então Δ é uma relação de equivalência sobre X (denominada **relação identidade** sobre X).
- Sejam X um conjunto e $\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in X\}$. Então Ω é uma relação de equivalência sobre X (denominada **relação universal** sobre X).
- Para cada $x \in \mathbb{R}$, denotemos por $\lfloor x \rfloor$ o maior número inteiro y tal que $y \leq x$ (parte inteira de x). A relação $\sim$ definida em $\mathbb{R}$ por, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x \sim y \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor,$$

é uma relação de equivalência.

A proposição seguinte permite classificar as relações binárias, em particular, permite verificar se uma dada relação binária é ou não uma relação de equivalência.

Proposição

Sejam X um conjunto, R uma relação binária sobre X e $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$. Então:

- ① R é reflexiva se, e só se, $\Delta \subseteq R$.
- ② R é irreflexiva se, e só se, $\Delta \cap R = \emptyset$.
- ③ R é simétrica se, e só se, $R = R^{-1}$.
- ④ R é anti-simétrica se, e só se, $(R \cap R^{-1}) \setminus \Delta = \emptyset$.
- ⑤ R é transitiva se, e só se, $(R \setminus \Delta) \circ (R \setminus \Delta) \subseteq R$.

Definição

Dados uma relação de equivalência R num conjunto X e um elemento $a \in X$, chamamos **classe de equivalência** de a (módulo R), que representamos usualmente por $[a]_R$ (ou, se não houver ambiguidade, simplesmente por $[a]$ ou, em certos casos, por $\bar{a}$), ao conjunto dos elementos x de X tais que $(x, a) \in R$, isto é a

$$[a]_R = \{x \in X \mid xRa\}.$$

Ao conjunto cujos elementos são as classes de equivalência $[a]_R$, com $a \in X$, chamamos **conjunto cociente** de X por R e representamo-lo por X/R .

Exemplo

Seja $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. A relação $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), (2, 5), (5, 2)\}$ é uma equivalência sobre X e temos $[1] = \{1, 2, 5\} = [2] = [5]$, $[3] = \{3\}$, $[4] = \{4\}$, donde $X/R = \{\{1, 2, 5\}, \{3\}, \{4\}\}$.

Exemplo

Fixado $n \in \mathbb{N}$, em $\mathbb{Z}$ definimos uma relação de equivalência $\equiv_n$ da seguinte forma: para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$x \equiv_n y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) x - y = kn.$$

Designamos esta relação em $\mathbb{Z}$ por **relação de congruência módulo n** .

Para indicar que $x \equiv_n y$, usualmente escrevemos $x \equiv y \pmod{n}$.

Sabemos também que:

$$\overline{0} = \{\dots, -2n, -n, 0, n, 2n, \dots\} = n\mathbb{Z},$$

$$\overline{1} = \{\dots, 1 - 2n, 1 - n, 1, 1 + n, 1 + 2n, \dots\} = 1 + n\mathbb{Z},$$

$$\vdots$$

$$\overline{k} = \{\dots, k - 2n, k - n, k, k + n, k + 2n, \dots\} = k + n\mathbb{Z},$$

$$\vdots$$

$$\overline{n-1} = \{\dots, -n-1, -1, n-1, 2n-1, 3n-1, \dots\} = (n-1) + n\mathbb{Z},$$

donde $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/R = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$.

Proposição

Sejam X um conjunto e R uma relação de equivalência sobre X . Para quaisquer $a, b \in X$, as seguintes afirmações são equivalentes:

- 1 bRa ;
- 2 $b \in [a]_R$;
- 3 $[b]_R = [a]_R$.

Teorema

Sejam X um conjunto e R uma relação de equivalência sobre X . Temos:

- 1 Para qualquer $x \in X$, $[x]_R \neq \emptyset$;
- 2 Para quaisquer $x, y \in X$, $[x]_R = [y]_R$ ou $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$;
- 3 $X = \bigcup_{x \in X} [x]_R$;
- 4 A relação R fica determinada pelas suas classes de equivalência.

Definição

Seja X um conjunto. Dizemos que um conjunto não vazio $\{X_i \mid i \in I\}$ de subconjuntos não vazios de X é uma **partição** de X se:

- ① $X = \bigcup_{i \in I} X_i$
- ② $i \neq j \implies X_i \cap X_j = \emptyset$, para quaisquer $i, j \in I$.

Exemplos

- Seja X um conjunto. Se $A \in \mathcal{P}(X)$ é tal que $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$, então $\{A, \bar{A}\}$ é uma partição de X .
- Seja $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Então, por exemplo,

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}, \quad \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \quad \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\} \quad \text{e} \quad \{\{1, 2, 3, 4\}\}$$

são partições de X . Pelo contrário, por exemplo,

$$\{\{1, 2\}, \{3\}\} \quad \text{e} \quad \{\{1, 2\}, \{1, 3, 4\}\}$$

não são partições de X .

Teorema

- 1 Se R é uma relação de equivalência sobre X , então o conjunto cociente X/R é uma partição de X .
- 2 Se $\mathcal{P} = \{X_i \mid i \in I\}$ é uma partição de X e R é a relação binária sobre X definida por

$$xRy \iff (\exists i \in I) x, y \in X_i,$$

para quaisquer $x, y \in X$, então:

- R é relação de equivalência sobre X ;
- $\mathcal{P} = X/R$.

Exemplo

Seja $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e consideremos a partição $\mathcal{P} = \{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4\}\}$ de X . Então, $\mathcal{P}$ determina a seguinte relação de equivalência sobre X :

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (5, 5), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\}.$$

Definição

Uma relação binária reflexiva, anti-simétrica e transitiva diz-se uma **relação de ordem parcial** (abreviadamente: r.o.p.).

As r.o.p. são usualmente denotadas pelos símbolos $\leq$ ou por $\subseteq$.

Definições

Seja $\leq$ uma relação de ordem parcial sobre um conjunto X . Dizemos que:

- Os elementos x e y de X são **comparáveis** se $x \leq y$ ou $y \leq x$;
- $\leq$ é uma **relação de ordem total** se quaisquer dois elementos de X são comparáveis.

Sejam $\leq$ uma r.o.p. sobre X e $x, y \in X$. Escrevemos $x < y$ para significar que $x \leq y$ e $x \neq y$.

Definição

Sejam X um conjunto e $\leq$ uma r.o.p. sobre X . Dizemos que o par $(X, \leq)$ é um **conjunto parcialmente ordenado** (abreviadamente: c.p.o.). Se $\leq$ for uma ordem total, dizemos que $(X, \leq)$ é um **conjunto totalmente ordenado** ou uma **cadeia** (abreviadamente: c.t.o.).

Exemplos

- Seja $\leq$ a relação de ordem usual em $\mathbb{R}$. Então $(\mathbb{R}, \leq)$ é uma cadeia. Também $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$ e $(\mathbb{Q}, \leq)$ são cadeias (para a ordem usual).
- Seja X um conjunto. A relação de inclusão $\subseteq$ definida sobre $\mathcal{P}(X)$ é uma relação de ordem parcial em $\mathcal{P}(X)$, pelo que $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ é um c.p.o..
- Em $\mathbb{N}$ definimos a seguinte relação binária (relação de divisibilidade) $|$:

$$a|b \text{ (} a \text{ divide } b) \iff (\exists c \in \mathbb{N}) ac = b,$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$. Então, $(\mathbb{N}, |)$ é um c.p.o..

Definição

Seja $(X, \leq)$ um c.p.o.. Dados $x, y \in X$, dizemos que y **cobre** x (relativamente a $\leq$) se $x < y$ e não existe $z \in X$ tal que $x < z < y$, i.e., equivalentemente, se $x \leq y$ e, para qualquer $z \in X$,

$$x \leq z \leq y \Rightarrow z = x \vee z = y.$$

Escrevemos $x << y$ para denotar que y cobre x .

Proposição

Seja $(X, \leq)$ um c.p.o. e $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$. Sejam $x, y \in X$ tais que $x < y$. Então, y cobre x se, e só se, $(x, y) \notin (\leq \setminus \Delta) \circ (\leq \setminus \Delta)$.

Exemplo

O c.p.o. $(\{1, 2, 3, 4\}, |)$, em que $|$ é a relação de divisibilidade ($x|y$ se, e só se, x divide y), é o conjunto seguinte:

$$| = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}.$$

Temos

$$|\setminus \Delta = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4)\}$$

e

$$(| \setminus \Delta) \circ (| \setminus \Delta) = \{(1, 4)\}.$$

Logo, pela proposição, 4 não cobre 1 mas 2 cobre 1, 3 cobre 1 e 4 cobre 2.

Diagrama de Hasse

Sejam $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e $\leq$ uma r.o.p. em X . A relação $\leq$ pode ser representada através de um diagrama (denominado **diagrama de Hasse**) construído do seguinte modo: os elementos de X são os pontos do diagrama e, para quaisquer $x, y \in X$, $x \neq y$, se y **cobre** x , colocamos o ponto que representa y “acima” do ponto que representa x e unimo-los com um segmento de recta:

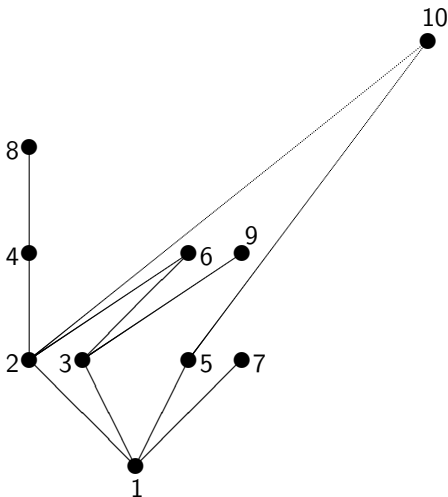


Exemplos

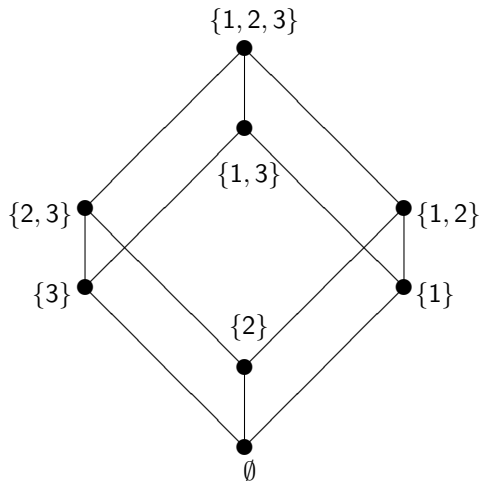
- Consideremos o c.p.o. $(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$, em que $\leq$ é a ordem usual. Esta cadeia tem o seguinte diagrama de Hasse:



- O c.p.o. $(\{1, 2, \dots, 10\}, |)$, em que $|$ é relação de divisibilidade, tem o seguinte diagrama de Hasse:



- O c.p.o. $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$ possui o seguinte diagrama de Hasse:



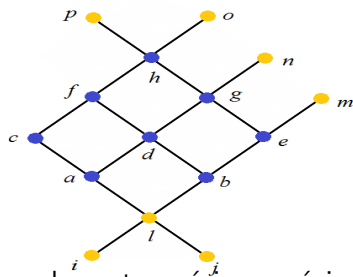
Definição

Sejam $(X, \leq)$ um c.p.o. e $Y \subseteq X$.

- Dizemos que $a \in X$ é um **minorante** [resp. **majorante**] de Y se $a \leq y$ [resp. $y \leq a$], para qualquer $y \in Y$.
- Chamamos **primeiro elemento** de Y (ou **mínimo** de Y) a um elemento $a \in Y$ tal que $a \leq y$, para qualquer $y \in Y$.
- Chamamos **último elemento** de Y (ou **máximo** de Y) a um elemento $b \in Y$ tal que $y \leq b$, para qualquer $y \in Y$.
- Dizemos que $a \in Y$ é um **elemento minimal** [resp. **maximal**] de Y se não existe $b \in Y$ tal que $b < a$ (resp. $a < b$).
- Dizemos que $a \in X$ é o **ínfimo** [resp. **supremo**] de Y se a é o maior (i.e. o máximo) dos minorantes [resp. o menor (i.e. o mínimo) dos majorantes].

Exemplo

Considere o conjunto $X = \{a, b, \dots, o, p\}$ e a relação de ordem parcial $\leq$ sobre X definida pelo seguinte diagrama de Hasse:



Indique, se existirem, os elementos mínimo, máximo, minimais, maximais, minorantes, majorantes, ínfimo e supremo do subconjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ (pontos azuis) do conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$.

(Exemplos no quadro)