Matemática Discreta

2017/18
Grafos - Árvores

Prof. Fátima Rodrigues
Departamento de Matemática
FCT/UNL

Baseados em textos e slides elaborados por professores do Departamento de Matemática

Programa

1. Parte 1 - Conjuntos e Relações e Funções
   1. Conjuntos, representações e operações básicas; conjunto das partes; cardinalidade.
   2. Relações binárias: equivalências e ordens parciais.
   3. Funções: bijecções; inversão e composição.
2. Parte 2 - Indução
   1. Definições indutivas
   2. Indução nos naturais e estrutural
   3. Primeiro e segundo princípios de indução
   4. Funções recursivas e provas por indução
3. Parte 3 - Grafos e Aplicações
   1. Generalidades
   2. Conexidade
   3. Árvores
   4. Grafos Eulerianos
   5. Matrizes e grafos

3.3. Árvores

3.3.1. Resultados sobre árvores

Na secção anterior, conhecemos os grafos cadeia, P_n, que são conexos e verificam a seguinte propriedade: qualquer seu arco é uma ponte. Estes grafos são árvores.

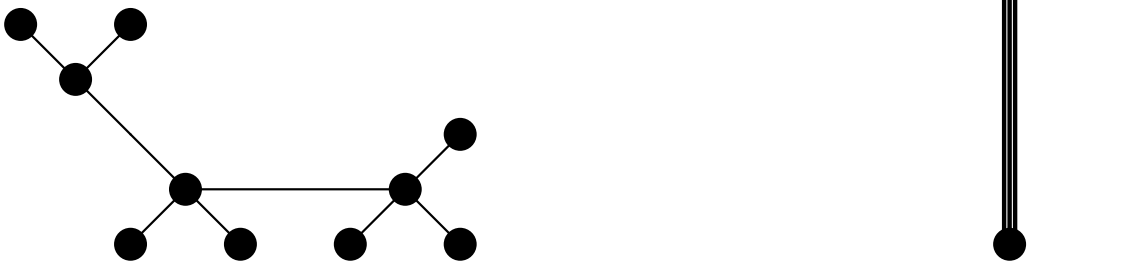
Como o próprio nome indica, quando construímos a árvore genealógica, de uma determinada família, estamos a construir um grafo que é uma árvore.

Definição

Designa-se por floresta um grafo sem ciclos e por árvore um grafo conexo sem ciclos.

Observação Uma floresta é um grafo em que cada componente conexa é uma árvore.

Exemplo: Consideremos o seguinte grafo:



Este grafo é uma floresta composta por duas árvores.

Teorema

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples, com $n \geq 2$ vértices. Então são equivalentes as afirmações:

(i) *G é um grafo conexo sem ciclos.*

(ii) *G não tem ciclos e tem $n - 1$ arcos.*

(iii) *G é conexo e tem $n - 1$ arcos.*

(iv) *G é conexo e se $u \in \mathcal{U}$ então $G - u$ é desconexo.*

(v) *$\forall x_i,\ x_j \in X$, tais que $x_i \neq x_j$ existe uma, e uma só, cadeia elementar $x_i - x_j$, em G.*

(vi) *G não tem ciclos e se $u \in (X \otimes X) \setminus \mathcal{U}$ então $G + u$ tem um, e um só, ciclo.*

Dem:
$(i) \Rightarrow (ii)$ Por indução em n.
Para $n = 2$ o resultado é verdadeiro.
Suponhamos o resultado verdadeiro para todo o grafo conexo sem ciclos com um número de vértices inferior ou igual a k, com $k \geq 2$.
Seja $G' = (X', \mathcal{U}')$ um grafo conexo sem ciclos com $k+1$ vértices. Como G' não tem ciclos, todo o arco $u' \in \mathcal{U}'$ é uma ponte.
Logo, $G' - u'$, com $u' \in \mathcal{U}'$, tem duas componentes conexas R_1 e R_2 com k_1 e k_2 vértices, respectivamente. Como R_1 e R_2 são grafos conexos sem ciclos, por hipótese de indução, o número de arcos de R_1 é $k_1 - 1$ e o número de arcos de R_2 é $k_2 - 1$. Porque $1 + k = k_1 + k_2$ e o número de arcos de G' é $1 + k_1 - 1 + k_2 - 1$, temos

$$1 + k_1 - 1 + k_2 - 1 = 1 + k - 1 = k.$$

Dem(cont.):
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Demonstremos que G é conexo. Suponhamos que G não é conexo e sejam $R_1, \ldots, R_p$ as componentes conexas de G, com $p \geq 2$.
Sejam n_i e m_i, respectivamente, o número de vértices e o número de arcos de R_i, $i = 1, \ldots, p$.
Porque R_i é conexo sem ciclos, temos

$$m_i = n_i - 1 \qquad\qquad i = 1, \ldots, p.$$

então, o número de arcos de G seria

$$\sum_{i=1}^{p} m_i = \sum_{i=1}^{p} n_i - p = n - p.$$

Como $p \geq 2$, concluiríamos que o número de arcos de G

$$n - p \leq n - 2,$$

o que contradiz a hipótese.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Dado que G tem n vértices e $n-1$ arcos, então para qualquer $u \in \mathcal{U}$, $G-u$ tem n vértices e $n-2$ arcos. Demonstremos que se $G' = G-u$ fosse conexo então o seu número de arcos m' verificaria $m' \geq n-1$, o que é uma contradição com $m' = n-2$. De facto se G' fosse conexo sem ciclos então por $(i) \Rightarrow (ii)$ teriamos $m' = n-1$. Por outro lado se G' fosse conexo com ciclos então retirando arcos pertencentes a ciclos obteriamos um grafo parcial de G ainda conexo e sem ciclos em que $m' > n-1$.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Como G é conexo, então para quaisquer dois vértices de G existe uma cadeia elementar, da qual são extremidades.
Se existissem dois vértices distintos de G que fossem extremidades de pelo menos duas cadeias elementares distintas, então, em G, existiria um ciclo. Sendo u um arco deste ciclo, como u não era ponte, $G-u$ era conexo, o que contradiz a hipótese.

$(v) \Rightarrow (vi)$ Se em G existisse um ciclo, então sendo x e y dois vértices distintos deste ciclo, existiriam duas cadeias elementares distintas $x - y$, o que contradiz (v). Logo, G não tem ciclos. Seja $u = \{x_i,\ x_j\} \notin \mathcal{U}$, com $x_i \neq x_j$, vértices de X. Por (v) existe em G uma cadeia elementar $x_i - x_j$, e dado que $x_i \neq x_j$ também é uma cadeia simples. Assim, $x_i - x_j,\ u,\ x_i$ é um ciclo em $G + u$.
Porque G não tem ciclos, então $G + u$ tem no máximo um ciclo.

$(vi) \Rightarrow (i)$ Demonstremos que G é conexo. Suponhamos que G é desconexo e sejam $x_i,\ x_j$ vértices de componentes conexas distintas. Tem-se $\{x_i,\ x_j\} \notin \mathcal{U}$. Como G não tem ciclos e não existem cadeias com extremidades em vértices de componentes conexas distintas, podemos dizer que $G + u$ não tem ciclos, o que contradiz (vi). Logo, G é conexo.

3.3. Árvores

Proposição

Uma floresta com n vértices e p componentes conexas tem $n - p$ arcos.

Dem: Exercício.

Proposição

Existem grafos simples com n vértices e $n - 1$ arcos que não são florestas e, portanto, não são árvores.

Dem: Considere-se $G = C_{n-1} \cup K_1$, com $n \geq 4$.

Proposição

Numa árvore, com $n \geq 2$ vértices, existem pelo menos dois vértices de grau 1.

Dem: Seja G uma árvore com $n \geq 2$ vértices. Seja $(d_1, \ldots, d_n)$ com $d_1 \geq \ldots \geq d_n$, a sequência de graus de G. Como G é conexo e $n \geq 2$ então, $d_n \geq 1$.
Suponhamos que, no máximo, G tinha um vértice de grau 1, então

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 1 + 2(n-1).$$

Como G é uma árvore com n vértices, o número de arcos é

$$m = n - 1.$$

Aplicando o Teorema do aperto de mãos, temos a contradição,

$$2(n-1) \geq 1 + 2(n-1).$$

Logo, G tem pelo menos dois vértices de grau 1.

Teorema

Sejam $d_1, \ldots, d_n$, *com* $n \geq 2$, *inteiros tais que*

$$d_1 \geq \ldots \geq d_n > 0.$$

Então, existe uma árvore cuja sequência de graus é

$$(d_1, \ldots, d_n)$$

se, e só se

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2.$$

3.3.2. Árvores Maximais

Em certas situações, o grafo conexo que temos não é uma árvore, mas queremos obter, a partir do grafo inicial, um grafo parcial que seja uma árvore.

Teorema

Um grafo é conexo se, e só se, admite uma árvore como grafo parcial.

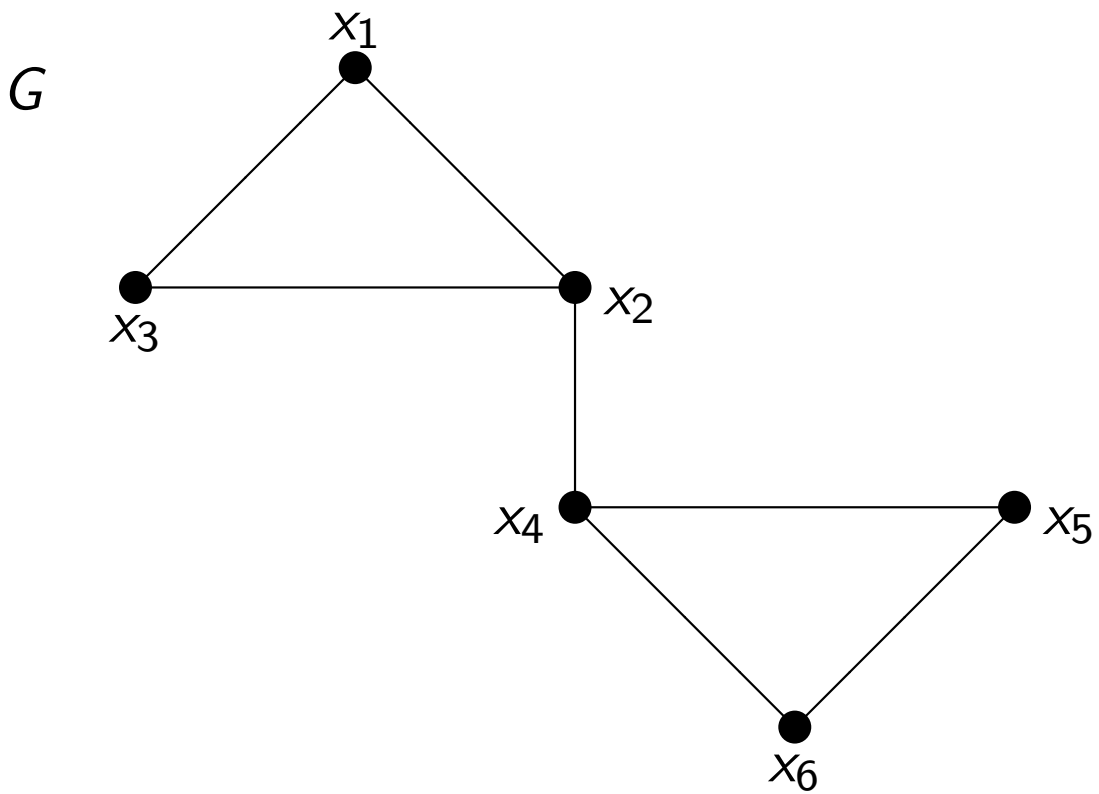
Dem: $\Longleftarrow$ Se um grafo G admite uma árvore como grafo parcial então G admite um grafo parcial conexo, logo é conexo.

$\Longrightarrow$ Se G não tem ciclos, então G é uma árvore (grafo parcial de G).
Se G tem um ciclo, seja u_1 um arco de um dos ciclos de G. Então u_1 não é ponte, pelo que $G_1 = G - u_1$ é conexo e tem um número de ciclos inferior ao número de ciclos de G. Se $G - u_1$ não tem ciclos então $G_1 = G - u_1$ é árvore (grafo parcial de G). Caso contrário, seja u_2 um arco de um ciclo de G_1. Então u_2 não é ponte, pelo que $G_2 = G_1 - u_2$ é conexo e tem um número de ciclos inferior ao número de ciclos de G_1. Porque o número de ciclos de G é finito, procedendo deste modo, obtemos um grafo $G_k = G_{k-1} - u_k$ que é conexo, sem ciclos. Logo G_k é árvore (grafo parcial de G).

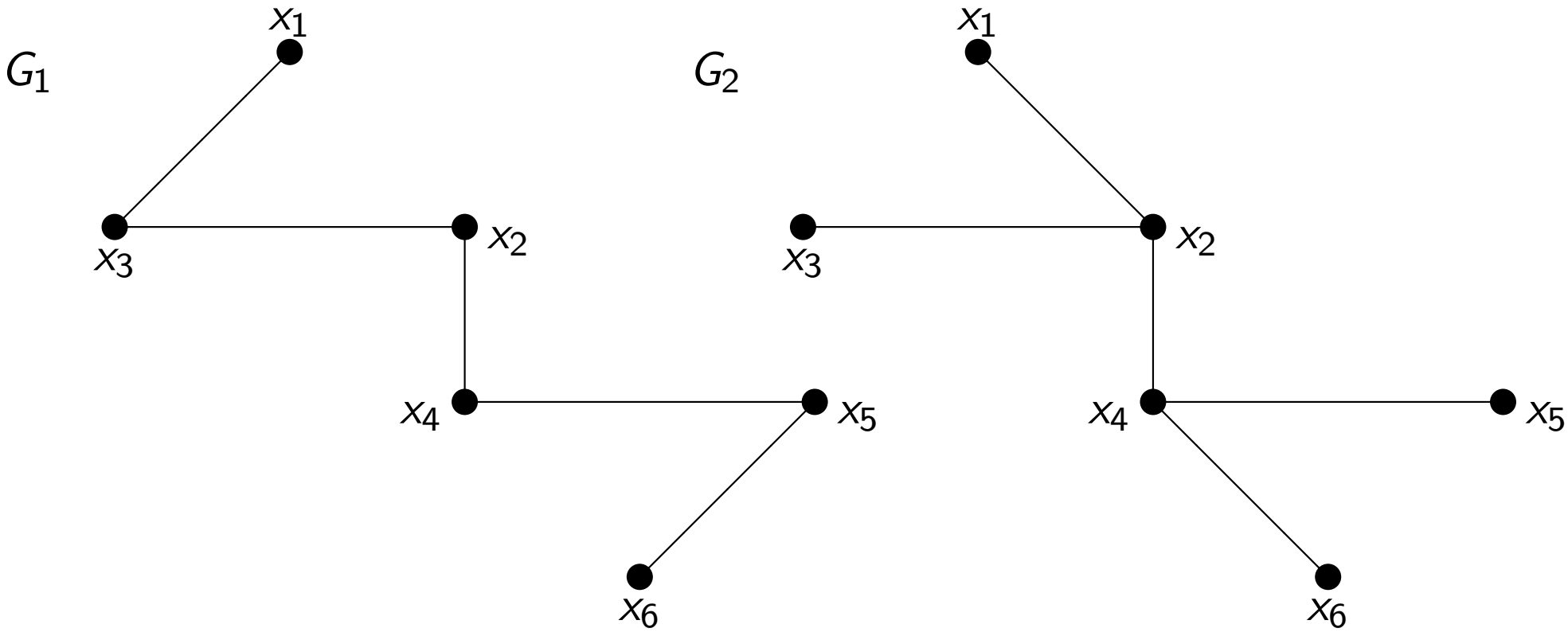
Definição

*Seja G um grafo (respectivamente, grafo conexo). Designa-se por floresta (respectivamente, **árvore**) maximal de G qualquer grafo parcial de G, que tenha o mesmo número de conexidade que G e que seja **floresta** (respectivamente, **árvore**).*

Exemplo: Consideremos o seguinte grafo simples,



3.3. Árvores



G_1 e G_2 são duas árvores maximais, não isomorfas de G

Definição

Chamamos grafo ponderado a um par $(G,\ v)$ *em que* $G = (X,\ \mathcal{U})$ *é um grafo e* v *é uma aplicação de* $\mathcal{U}$ *no conjunto dos números reais.*

Se $u \in \mathcal{U}$ *designa-se por valor/peso do arco* **u** *o número real* $v(u)$ *e designa-se por* **valor de G**, *e representa-se por* $v(G)$, *o número real*

$$v(G) = \sum_{u \in \mathcal{U}} v(u).$$

Vejamos dois algoritmos para determinar árvores maximais com valor mínimo.

Algoritmo de Kruskal

Seja $(G,\ v)$ um grafo ponderado, sendo $G = (X,\ \mathcal{U})$ um grafo conexo com n vértices.

1º) Escolha-se um arco u_1 de G tal que

$$v(u_1) = \min_{u \in \mathcal{U}} v(u).$$

2º) Se os arcos $u_1, \ldots,\ u_i$ já foram escolhidos, então, sendo $\mathcal{U}_i = \{u_1, \ldots,\ u_i\}$, escolha-se um arco $u_{i+1} \in \mathcal{U}$ tal que

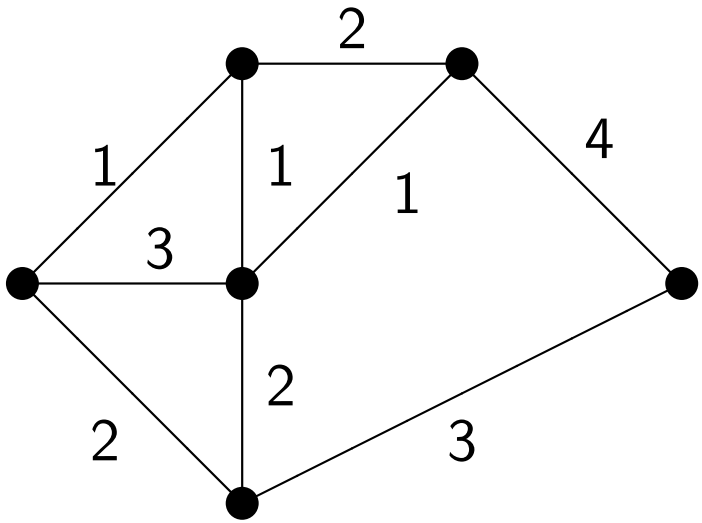
(1) $u_{i+1} \notin \mathcal{U}_i$

(2) $G' = (X,\ \mathcal{U}_i \cup \{u_{i+1}\})$ não tem ciclos

(3) u_{i+1} é de entre os arcos que verificam as condições (1) e (2), um com valor mínimo.

3º) Se já foram escolhidos $n-1$ arcos, então o algoritmo termina. Caso contrário, repita-se 2º).

Exemplo: Consideremos o seguinte grafo ponderado



Calculemos, usando o Algoritmo de Kruskal, uma árvore maximal de valor mínimo.

Algoritmo de Prim

Seja $(G,\ v)$ um grafo ponderado, sendo $G = (X,\ \mathcal{U})$ um grafo conexo com n vértices.

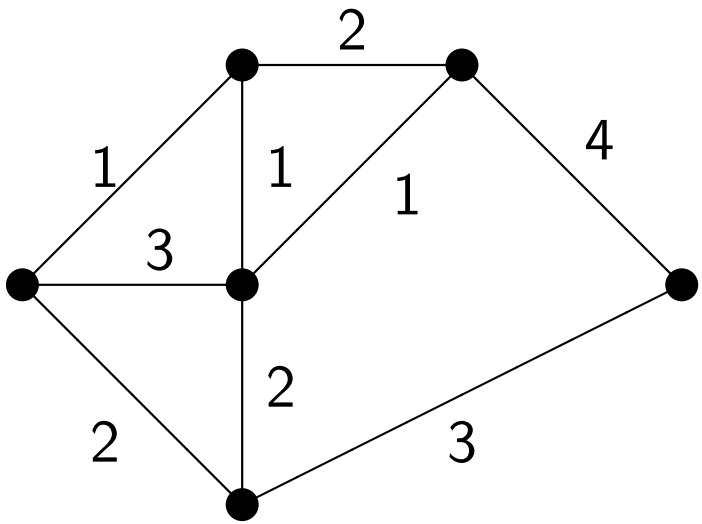
1º) Considere-se um vértice arbitrário de G, que designamos por x_1.

2º) Escolha-se um arco u_1 de G, incidente em x_1, que tenha valor mínimo.

3º) Se os arcos $u_1, ..., u_i$ já foram escolhidos e sendo $X_i = \{x_1, ..., x_{i+1}\}$ o conjunto de vértices formado pela suas extremidades, escolha-se um arco u_{i+1} de valor mínimo entre os arcos $\{x_j, x_{i+2}\}$ de G tal que $x_j \in X_i$ e $x_{i+2} \notin X_i$ (i.e. u_{i+1} é um arco de valor mínimo entre os arcos ainda não escolhidos com precisamente uma extremidade em X_i).

4º) Se já foram escolhidos $n-1$ arcos, então o algoritmo termina. Caso contrário, repita-se 3º).

Exemplo: Com o grafo ponderado do exemplo anterior,



calculemos uma árvore maximal de valor mínimo, mas utilizando o Algoritmo de Prim e partindo do vértice x_1.

Observações:

• Se temos um grafo simples conexo e queremos uma sua árvore maximal, podemos usar qualquer um dos algoritmos anteriores bastando para isso, atribuir o mesmo valor a todos os arcos do grafo.

• Em geral, em termos de implementação em computador, o Algoritmo de Prim é mais rápido do que o de Kruskal.