

Matemática Discreta

2017/18

Matrizes e Grafos

Prof.^a Fátima Rodrigues
Departamento de Matemática
FCT/UNL

Baseados em textos e slides elaborados por professores do Departamento de Matemática

Programa

1 Parte 1 - Conjuntos e Relações e Funções

- 1 Conjuntos, representações e operações básicas; conjunto das partes; cardinalidade.
- 2 Relações binárias: equivalências e ordens parciais.
- 3 Funções: bijecções; inversão e composição.

2 Parte 2 - Indução

- 1 Definições indutivas
- 2 Indução nos naturais e estrutural
- 3 Primeiro e segundo princípios de indução
- 4 Funções recursivas e provas por indução

3 Parte 3 - Grafos e Aplicações

- 1 Generalidades
- 2 Conexidade
- 3 Árvores
- 4 Grafos Eulerianos
- 5 Matrizes e grafos

3.6. Matrizes e Grafos

2.5.1. Matriz de adjacências

Uma outra forma de representar um grafo é através de uma matriz quadrada de ordem igual à ordem do grafo.

Definição

Chamamos *marcação dos vértices* de um grafo $G = (X, \mathcal{U})$, com $|X| = n$, a uma aplicação bijectiva ψ de X em $\{1, \dots, n\}$.

Um *grafo marcado* nos vértices é um par (G, ψ) em que G é um grafo e ψ é uma marcação dos vértices de G .

3.6. Matrizes e Grafos

2.5.1. Matriz de adjacências

Uma outra forma de representar um grafo é através de uma matriz quadrada de ordem igual à ordem do grafo.

Definição

Chamamos *marcação dos vértices* de um grafo $G = (X, \mathcal{U})$, com $|X| = n$, a uma aplicação bijectiva ψ de X em $\{1, \dots, n\}$.

Um *grafo marcado* nos vértices é um par (G, ψ) em que G é um grafo e ψ é uma marcação dos vértices de G .

3.6. Matrizes e Grafos

2.5.1. Matriz de adjacências

Uma outra forma de representar um grafo é através de uma matriz quadrada de ordem igual à ordem do grafo.

Definição

Chamamos *marcação dos vértices* de um grafo $G = (X, \mathcal{U})$, com $|X| = n$, a uma aplicação bijectiva ψ de X em $\{1, \dots, n\}$.

Um *grafo marcado* nos vértices é um par (G, ψ) em que G é um grafo e ψ é uma marcação dos vértices de G .

3.6. Matrizes e Grafos

Definição

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um digrafo marcado nos vértices, com (G, ψ) e $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Chamamos **matriz de adjacências** de G , em relação à marcação ψ , à matriz $A(G) = [a_{ij}]$, de ordem n , tal que

$$a_{\psi(x_i)\psi(x_j)} = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_i, x_j) \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{se } (x_i, x_j) \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

Seja (G, ψ) um grafo marcado nos vértices, com $G = (X, \mathcal{U})$ e $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Referimo-nos à marcação $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ para designar a marcação ψ tal que

$$\psi(x_{i_j}) = j, \quad j = 1, \dots, n.$$

3.6. Matrizes e Grafos

Definição

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um digrafo marcado nos vértices, com (G, ψ) e $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Chamamos **matriz de adjacências** de G , em relação à marcação ψ , à matriz $A(G) = [a_{ij}]$, de ordem n , tal que

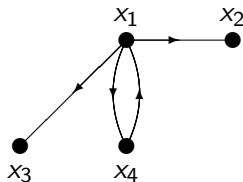
$$a_{\psi(x_i)\psi(x_j)} = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_i, x_j) \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{se } (x_i, x_j) \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

Seja (G, ψ) um grafo marcado nos vértices, com $G = (X, \mathcal{U})$ e $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Referimo-nos à marcação $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ para designar a marcação ψ tal que

$$\psi(x_{i_j}) = j, \quad j = 1, \dots, n.$$

3.6. Matrizes e Grafos

Exemplo: Consideremos o digrafo G

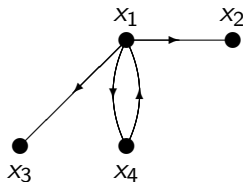


A matriz de adjacências de G , em relação às marcações (x_1, x_2, x_3, x_4) e (x_2, x_3, x_1, x_4) é, respectivamente, a matriz

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A'(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.6. Matrizes e Grafos

Exemplo: Consideremos o digrafo G

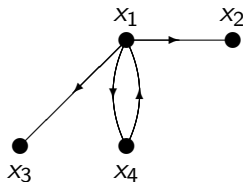


A matriz de adjacências de G , em relação às marcações (x_1, x_2, x_3, x_4) e (x_2, x_3, x_1, x_4) é, respectivamente, a matriz

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A'(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.6. Matrizes e Grafos

Exemplo: Consideremos o digrafo G



A matriz de adjacências de G , em relação às marcações (x_1, x_2, x_3, x_4) e (x_2, x_3, x_1, x_4) é, respectivamente, a matriz

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A'(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.6. Matrizes e Grafos

As matrizes de adjacências de um digrafo em relação a marcações diferentes são, em geral, diferentes.

Proposição

Sejam A e A' matrizes de adjacências de um digrafo $G = (X, \mathcal{U})$ em relação a marcações diferentes dos seus vértices. Então, existe uma matriz de permutação P tal que

$$A' = PAP^{-1}$$

(uma matriz de permutação de ordem n é uma matriz que se obtém da matriz identidade de ordem n efectuando uma troca nas suas linhas).

3.6. Matrizes e Grafos

As matrizes de adjacências de um digrafo em relação a marcações diferentes são, em geral, diferentes.

Proposição

Sejam A e A' matrizes de adjacências de um digrafo $G = (X, \mathcal{U})$ em relação a marcações diferentes dos seus vértices. Então, existe uma matriz de permutação P tal que

$$A' = PAP^{-1}$$

(uma matriz de permutação de ordem n é uma matriz que se obtém da matriz identidade de ordem n efectuando uma troca nas suas linhas).

3.6. Matrizes e Grafos

Observação:

- 1 Sendo $G = (X, \mathcal{U})$ um digrafo com $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, referimos **marcação usual** dos vértices de G , à marcação $(x_1, \dots, x_n)$. A matriz de adjacências de G , em relação à marcação usual, é a matriz $A = [a_{ij}]$ em que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_i, x_j) \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{se } (x_i, x_j) \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

3.6. Matrizes e Grafos

- 2 Através da matriz de adjacências $A = [a_{ij}]$ de um digrafo G , em relação à marcação $(x_1, \dots, x_n)$, podemos determinar o grau exterior e o grau interior de cada vértice de G .

$$d^+(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij},$$

isto é, é a soma dos elementos da linha i de A , ou equivalentemente, o número de elementos da linha i que são iguais a 1, e

$$d^-(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji},$$

isto é, é a soma dos elementos da coluna i de A .

3.6. Matrizes e Grafos

- 2 Através da matriz de adjacências $A = [a_{ij}]$ de um digrafo G , em relação à marcação $(x_1, \dots, x_n)$, podemos determinar o grau exterior e o grau interior de cada vértice de G .

$$d^+(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij},$$

isto é, é a soma dos elementos da linha i de A , ou equivalentemente, o número de elementos da linha i que são iguais a 1, e

$$d^-(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji},$$

isto é, é a soma dos elementos da coluna i de A .

3.6. Matrizes e Grafos

Exemplo: Considerando o grafo do exemplo anterior, cuja matriz de adjacências em relação à marcação (x_1, x_2, x_3, x_4) , dos seus vértices é

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

temos

$$\sum_{j=1}^4 a_{1j} = 3 = d^+(x_1)$$

e

$$\sum_{j=1}^4 a_{j3} = 1 = d^-(x_3).$$

3.6. Matrizes e Grafos

Teorema

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um digrafo marcado nos vértices e $A = [a_{ij}]$ a matriz de adjacências de G , em relação à marcação usual $(x_1, \dots, x_n)$. Então, na matriz

$$AA^T = [s_{ij}]$$

s_{ij} representa o número de sucessores simultâneos de x_i e x_j , isto é,

$$s_{ij} = |\Gamma^+(x_i) \cap \Gamma^+(x_j)|.$$

3.6. Matrizes e Grafos

Definição

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um **grafo simples** marcado nos vértices, com (G, ψ) e $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Chamamos **matriz de adjacências** de G , em relação à marcação ψ , à matriz $A(G) = [a_{ij}]$, de ordem n , tal que

$$a_{\psi(x_i)\psi(x_j)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \text{ ou } \{x_i, x_j\} \notin \mathcal{U} \\ 1 & \text{se } \{x_i, x_j\} \in \mathcal{U} \end{cases}$$

Observação:

- 1 A matriz de adjacências de um grafo simples tem todos os elementos diagonais nulos.
- 2 A matriz de adjacências de um grafo simples tem a propriedade de ser simétrica, isto é, $A = A^T$.

3.6. Matrizes e Grafos

Definição

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um **grafo simples** marcado nos vértices, com (G, ψ) e $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Chamamos **matriz de adjacências** de G , em relação à marcação ψ , à matriz $A(G) = [a_{ij}]$, de ordem n , tal que

$$a_{\psi(x_i)\psi(x_j)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \text{ ou } \{x_i, x_j\} \notin \mathcal{U} \\ 1 & \text{se } \{x_i, x_j\} \in \mathcal{U} \end{cases}$$

Observação:

- 1 A matriz de adjacências de um grafo simples tem todos os elementos diagonais nulos.
- 2 A matriz de adjacências de um grafo simples tem a propriedade de ser simétrica, isto é, $A = A^T$.

3.6. Matrizes e Grafos

Definição

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um **grafo simples** marcado nos vértices, com (G, ψ) e $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Chamamos **matriz de adjacências** de G , em relação à marcação ψ , à matriz $A(G) = [a_{ij}]$, de ordem n , tal que

$$a_{\psi(x_i)\psi(x_j)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \text{ ou } \{x_i, x_j\} \notin \mathcal{U} \\ 1 & \text{se } \{x_i, x_j\} \in \mathcal{U} \end{cases}$$

Observação:

- 1 A matriz de adjacências de um grafo simples tem todos os elementos diagonais nulos.
- 2 A matriz de adjacências de um grafo simples tem a propriedade de ser simétrica, isto é, $A = A^T$.

3.6. Matrizes e Grafos

Teorema

Seja G um grafo simples.

G é desconexo se, e só se, existe uma marcação dos vértices em relação à qual a matriz de adjacências de G tem a forma

$$\begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{bmatrix}$$

sendo A_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, uma matriz quadrada e $k \geq 2$.

3.6. Matrizes e Grafos

Teorema

Seja $A = [a_{ij}]$ a matriz de adjacências de um grafo simples $G = (X, \mathcal{U})$, em relação à marcação usual $(x_1, \dots, x_n)$. Então, na matriz

$$A^k = [a_{ij}^{(k)}], \quad \text{com } k \in \mathbb{N},$$

$a_{ij}^{(k)}$ é igual ao número de cadeias $x_i - x_j$ com comprimento k , existentes em G .

Observação: Substituindo no Teorema anterior, “grafo simples” por “digrafo” e “cadeia” por “caminho”, obtemos um resultado válido.

3.6. Matrizes e Grafos

Teorema

Seja $A = [a_{ij}]$ a matriz de adjacências de um grafo simples $G = (X, \mathcal{U})$, em relação à marcação usual $(x_1, \dots, x_n)$. Então, na matriz

$$A^k = [a_{ij}^{(k)}], \quad \text{com } k \in \mathbb{N},$$

$a_{ij}^{(k)}$ é igual ao número de cadeias $x_i - x_j$ com comprimento k , existentes em G .

Observação: Substituindo no Teorema anterior, “grafo simples” por “digrafo” e “cadeia” por “caminho”, obtemos um resultado válido.

3.6. Matrizes e Grafos

Exemplo: Com o exemplo anterior, determinemos o número de caminhos $x_4 - x_3$ de comprimento 2, existentes em G . Ora,

$$A(G)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como esta matriz, tem na posição $(4, 3)$ um elemento não nulo, usando o Teorema, existe um, e um só, caminho de $x_4 - x_3$, de comprimento 2, em G .

3.6. Matrizes e Grafos

Exemplo: Com o exemplo anterior, determinemos o número de caminhos $x_4 - x_3$ de comprimento 2, existentes em G . Ora,

$$A(G)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como esta matriz, tem na posição $(4, 3)$ um elemento não nulo, usando o Teorema, existe um, e um só, caminho de $x_4 - x_3$, de comprimento 2, em G .

3.6. Matrizes e Grafos

Definição

Seja $G = (X, U)$ um grafo simples. Chama-se **matriz de alcançabilidade** de G em relação à marcação usual $(x_1, \dots, x_n)$ dos seus vértices, à matriz $R(G) = [r_{ij}]$ de ordem $n = |X|$, tal que r_{ij} é

$$\begin{cases} 1 & \text{se existe em } G \text{ uma cadeia } x_i - x_j \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Proposição

Um grafo simples é conexo se, e só se, a sua matriz de alcançabilidade tem todos os elementos iguais a 1.

3.6. Matrizes e Grafos

Definição

Seja $G = (X, U)$ um grafo simples. Chama-se **matriz de alcançabilidade** de G em relação à marcação usual $(x_1, \dots, x_n)$ dos seus vértices, à matriz $R(G) = [r_{ij}]$ de ordem $n = |X|$, tal que r_{ij} é

$$\begin{cases} 1 & \text{se existe em } G \text{ uma cadeia } x_i - x_j \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Proposição

Um grafo simples é conexo se, e só se, a sua matriz de alcançabilidade tem todos os elementos iguais a 1.

3.6. Matrizes e Grafos

Definição

Chama-se **matriz booleana associada** a uma matriz $M = [m_{ij}]$ cujos elementos são inteiros não negativos, à matriz $M_B = [m'_{ij}]$ tal que m'_{ij} é

$$\begin{cases} 1 & \text{se } m_{ij} > 0 \\ 0 & \text{se } m_{ij} = 0 \end{cases}$$

Teorema

Seja $G = (X, U)$ um grafo simples com matriz de adjacências A , em relação à marcação usual $(x_1, \dots, x_n)$ dos seus vértices. Então a matriz de alcançabilidade de G , em relação à mesma marcação é a matriz

$$R = (I_n + A + A^2 + \dots + A^{n-1})_B.$$

3.6. Matrizes e Grafos

Definição

Chama-se **matriz booleana associada** a uma matriz $M = [m_{ij}]$ cujos elementos são inteiros não negativos, à matriz $M_B = [m'_{ij}]$ tal que m'_{ij} é

$$\begin{cases} 1 & \text{se } m_{ij} > 0 \\ 0 & \text{se } m_{ij} = 0 \end{cases}$$

Teorema

Seja $G = (X, U)$ um grafo simples com matriz de adjacências A , em relação à marcação usual $(x_1, \dots, x_n)$ dos seus vértices. Então a matriz de alcançabilidade de G , em relação à mesma marcação é a matriz

$$R = (I_n + A + A^2 + \dots A^{n-1})_B.$$

3.6. Matrizes e Grafos

Definição

Seja $G = (X, U)$ um digrafo. Chama-se **matriz de alcançabilidade** de G em relação à marcação usual $(x_1, \dots, x_n)$ dos seus vértices, à matriz $R(G) = [r_{ij}]$ de ordem $n = |X|$, tal que r_{ij} é

$$\begin{cases} 1 & \text{se existe em } G \text{ um caminho } x_i - x_j \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Proposição

Um digrafo é conexo se, e só se, a matriz de alcançabilidade do seu grafo subjacente tem todos os elementos iguais a 1.

3.6. Matrizes e Grafos

Definição

Seja $G = (X, U)$ um digrafo. Chama-se **matriz de alcançabilidade** de G em relação à marcação usual $(x_1, \dots, x_n)$ dos seus vértices, à matriz $R(G) = [r_{ij}]$ de ordem $n = |X|$, tal que r_{ij} é

$$\begin{cases} 1 & \text{se existe em } G \text{ um caminho } x_i - x_j \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Proposição

Um digrafo é conexo se, e só se, a matriz de alcançabilidade do seu grafo subjacente tem todos os elementos iguais a 1.

3.6. Matrizes e Grafos

Proposição

Um digrafo é fortemente conexo se, e só se, a sua matriz de alcançabilidade tem todos os elementos iguais a 1.

Teorema

Seja $G = (X, U)$ um digrafo com matriz de alcançabilidade R , em relação à marcação usual $(x_1, \dots, x_n)$ dos seus vértices. Então os vértices da componente fortemente conexa a que pertence o vértice x_i são os vértices x_j correspondentes a $r_{ij} = r_{ji} = 1$.

3.6. Matrizes e Grafos

Proposição

Um digrafo é fortemente conexo se, e só se, a sua matriz de alcançabilidade tem todos os elementos iguais a 1.

Teorema

Seja $G = (X, U)$ um digrafo com matriz de alcançabilidade R , em relação à marcação usual $(x_1, \dots, x_n)$ dos seus vértices. Então os vértices da componente fortemente conexa a que pertence o vértice x_i são os vértices x_j correspondentes a $r_{ij} = r_{ji} = 1$.

3.6. Matrizes e Grafos

Definição

Chama-se **marcação dos arcos** de um grafo $G = (X, U)$, com $|U| = m$, a uma aplicação bijectiva $\varphi : U \longrightarrow \{1, \dots, m\}$. Um **grafo marcado nos vértices e nos arcos** é um terno (G, ψ, φ) , onde G é um grafo, ψ é uma marcação dos vértices de G e φ é uma marcação dos arcos de G .

Definição

Seja $G = (X, U)$ um digrafo marcado nos vértices e nos arcos, sendo $(x_1, \dots, x_n)$ e $(u_1, \dots, u_m)$, respectivamente, a marcação dos vértices e a marcação dos arcos de G . Chama-se **matriz de incidências** de G em relação a tais marcações à matriz $B(G) = [b_{ij}]$, do tipo $n \times m$, tal que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i \text{ é a extremidade inicial do arco } u_j \\ -1 & \text{se } x_i \text{ é a extremidade final do arco } u_j \\ 0 & \text{se } x_i \text{ não é extremidade arco } u_j \end{cases}$$

3.6. Matrizes e Grafos

Definição

Chama-se **marcação dos arcos** de um grafo $G = (X, U)$, com $|U| = m$, a uma aplicação bijectiva $\varphi : U \longrightarrow \{1, \dots, m\}$. Um **grafo marcado nos vértices e nos arcos** é um terno (G, ψ, φ) , onde G é um grafo, ψ é uma marcação dos vértices de G e φ é uma marcação dos arcos de G .

Definição

Seja $G = (X, U)$ um digrafo marcado nos vértices e nos arcos, sendo $(x_1, \dots, x_n)$ e $(u_1, \dots, u_m)$, respectivamente, a marcação dos vértices e a marcação dos arcos de G . Chama-se **matriz de incidências** de G em relação a tais marcações à matriz $B(G) = [b_{ij}]$, do tipo $n \times m$, tal que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i \text{ é a extremidade inicial do arco } u_j \\ -1 & \text{se } x_i \text{ é a extremidade final do arco } u_j \\ 0 & \text{se } x_i \text{ não é extremidade arco } u_j \end{cases}$$

3.6. Matrizes e Grafos

Definição

Seja $G = (X, U)$ um grafo simples marcado nos vértices e nos arcos, sendo $(x_1, \dots, x_n)$ e $(u_1, \dots, u_m)$, respectivamente, a marcação dos vértices e a marcação dos arcos de G . Chama-se **matriz de incidências** de G em relação a tais marcações à matriz $B(G) = [b_{ij}]$, do tipo $n \times m$, tal que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i \text{ é extremidade do arco } u_j \\ 0 & \text{se } x_i \text{ não é extremidade arco } u_j \end{cases}$$

Observe-se:

- a partir da matriz de incidências de um digrafo é possível determinar o grau exterior e interior de cada um dos vértices do grafo
- a partir da matriz de incidências de um grafo simples é possível determinar o grau de cada um dos vértices do grafo.

(Como?)

3.6. Matrizes e Grafos

Definição

Seja $G = (X, U)$ um grafo simples marcado nos vértices e nos arcos, sendo $(x_1, \dots, x_n)$ e $(u_1, \dots, u_m)$, respectivamente, a marcação dos vértices e a marcação dos arcos de G . Chama-se **matriz de incidências** de G em relação a tais marcações à matriz $B(G) = [b_{ij}]$, do tipo $n \times m$, tal que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i \text{ é extremidade do arco } u_j \\ 0 & \text{se } x_i \text{ não é extremidade arco } u_j \end{cases}$$

Observe-se:

- a partir da matriz de incidências de um digrafo é possível determinar o grau exterior e interior de cada um dos vértices do grafo
- a partir da matriz de incidências de um grafo simples é possível determinar o grau de cada um dos vértices do grafo.

(Como?)