2.6 Matrizes e grafos (Mais exercícios)

1. Seja $G = (X, U)$ um grafo simples em que todo o arco tem uma extremidade num vértice de grau ímpar e a outra extremidade num vértice de grau par. Justifique que existe uma marcação de vértices em relação á qual a matriz de adjacências de G tem a forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M^\top & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Seja $G = (X, U)$ um grafo simples conexo, com n vértices. Chama-se *matriz das distâncias* de G em relação à marcação $(x_1, \ldots, x_n)$ dos seus vértices, à matriz $D = [d_{ij}]$, de ordem n em que d_{ij} é igual à distância do vértice x_i ao vértice x_j, isto é, ao menor comprimento das cadeias $x_i - x_j$.

   Enuncie algumas propriedades da matriz D.

3. Seja $G = (X, U)$ um digrafo sem circuitos e A a matriz de adjacências de G em relação à marcação $(x_1, \ldots, x_n)$ dos seus vértices.

   Como determinar, a partir da matriz A ou das suas potências, o número total de caminhos do vértice x_i ao vértice x_j?

4. Seja

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   a matriz de alcançabilidade de um digrafo $G = (X, U)$ em relação à marcação $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ dos seus vértices. Sabendo que G tem a seguinte propriedade:

$$(x, y) \in U \wedge (y, z) \in U \Rightarrow (x, z) \in U),$$

   indique a matriz de adjacências de G em relação à mesma marcação de vértices.

5. Seja $R = [r_{ij}]$ a matriz de alcançabilidade de um digrafo $G = (X, U)$ em relação à marcação $(x_1, \ldots, x_n)$ dos seus vértices e

$$R^2 = [r_{ij}^{(2)}] \quad i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

   Justifique que:

   (a) $r_{ii}^{(2)}$ é igual ao número de vértices da componente fortemente conexa a que pertence x_i.

   (b) $r_{ij}^{(2)}$ é o número total de vértices de G que pertencem a pelo menos um caminho $x_i - x_j$.

   (c) x_i e x_j pertencem à mesma componente fortemente conexa se, e só se,

$$r_{ij}^{(2)} = r_{ii}^{(2)}.$$

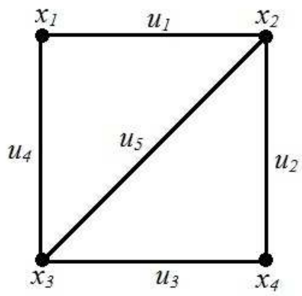
6. Seja $B = [b_{ij}]$ a matriz de incidências de um digrafo $G = (X, U)$ em relação à marcação $(x_1, \ldots, x_n)$ dos seus vértices e à marcação $(u_1, \ldots, u_m)$ dos seus arcos.

   Indique como determinar a partir da matriz B:

   (a) O grau interior/exterior do vértice x_i.
   (b) O grau do vértice x_j
   (c) Se G tem circuitos de comprimento 2.
   (d) Se G é um torneio.
   (e) A matriz de incidências do grafo subjacente a G.

7. Justifique que se a matriz de incidências de um grafo simples é uma matriz quadrada então G tem pelo menos um ciclo.

8. Considere o grafo



   (a) Determine a matriz de incidências $B(G)$ deste grafo em relação à marcação (x_1, x_2, x_3, x_4) dos seus vértices e à marcação $(u_1, u_2, u_3, u_3, u_4, u_5)$ dos seus arcos.
   (b) Calcule $BB^\top$.
   (c) Se B' é a matriz de incidências de um grafo simples G', tente descrever qual o significado dos elementos da matriz $B'B'^\top$.

9. Seja A a matriz de adjacências de um grafo simples $G = (X, U)$ em relação à marcação $(x_1, \ldots, x_n)$ dos seus vérttices e B a matriz de incidências de G em relação à mesma marcação de vértices e em relação à marcação $(u_1, \ldots, u_m)$ dos seus arcos. Mostre que

$$A = BB^\top - D,$$

   onde D é a matriz diagonal de ordem n em que $d_{ii} = d_G(x_i), \quad i \in \{1, \ldots, n\}$.

10. Seja B a matriz de incidências de um digrafo conexo com $n \geq 2$ vértices.

    Mostre que a linha que resulta da soma de quaisquer k linhas de B, com $k < n$, tem pelo menos um elemento não nulo.