

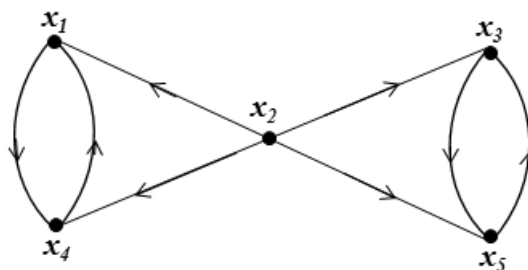
[Cotação]

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

1. Considere a sequência $(5, 5, 4, 3, 2, 2, 1)$.

- [1,5] (a) Mostre, usando o Algoritmo das Sequências Gráficas que existe um grafo simples, G , que admite a sequência dada como sequência de graus.
- [1,0] (b) Determine a ordem e o tamanho de G .
- [1,0] (c) Apresente, justificando, a sequência de graus de $\overline{G}$ (o grafo complementar de G).
- [1,5] (d) Justifique que G e $\overline{G}$ não são árvores.

2. Considere o seguinte grafo G :



- [1,0] (a) Determine a sequência de graus exteriores, a sequência de graus interiores e a sequência de graus de G .
- [1,0] (b) Apresente as componentes conexas e as componentes fortemente conexas de G e conclua, justificando, se G é conexo ou se é fortemente conexo.
- [1,0] (c) Indique, justificando, se G é euleriano ou semi-euleriano.
- [2,0] (d) Construa a matriz de adjacências de G e utilize essa matriz para justificar que, em G , existe apenas um caminho $x_2 - x_1$ de comprimento 2.

3. Sejam $G_1 = (X_1, \mathcal{U}_1)$ e $G_2 = (X_2, \mathcal{U}_2)$ grafos simples com $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

Seja $G_1 + G_2 = (X_1 \cup X_2, \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup X_1 \otimes X_2)$ um grafo em que $X_1 \otimes X_2 = \{\{x, y\} : x \in X_1 \text{ e } y \in X_2\}$.

Considere que G_1 é regular de grau r e G_2 é regular de grau s .

- [1,5] (a) Determine o grau dos vértices de $G_1 + G_2$.
- [1,0] (b) Indique uma condição para que $G_1 + G_2$ seja regular.
- [1,5] (c) Justifique que $G_1 + G_2$ é um grafo conexo.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

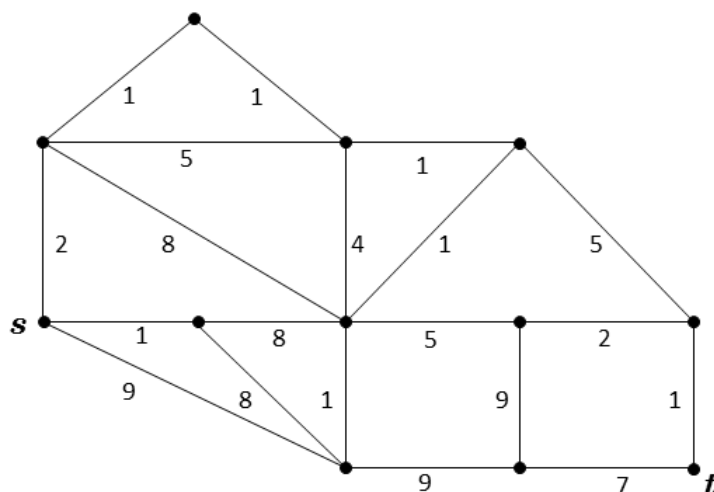
Número de aluno:

--	--	--	--	--	--

Número de caderno:

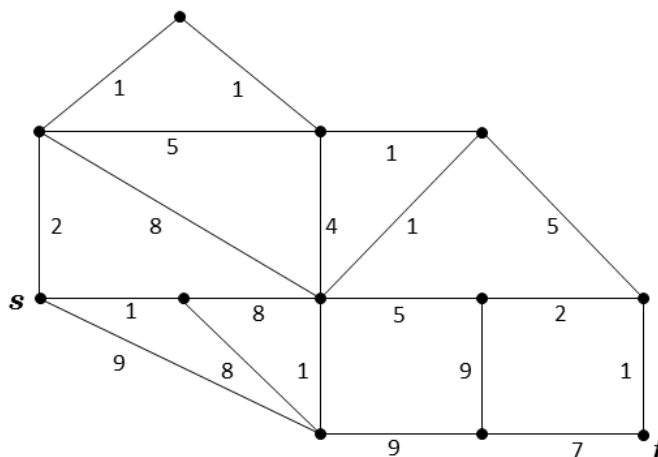
--	--	--	--	--	--

- [3,0] 4. Usando o algoritmo de Kruskal, determine uma árvore maximal de valor mínimo para o seguinte grafo ponderado. Indique o valor da árvore obtida.



[Identifique os arcos, numerando-os pela ordem que os for escolhendo.]

- [3,0] 5. Considere o seguinte grafo ponderado:



Utilize o algoritmo da Cadeia mais Curta para determinar uma cadeia $s - t$ mínima L . Indique L e o seu valor. [Deve indicar explicitamente todas as atribuições efectuadas].

Fim

1. (a) Apliquemos o teorema das Sequências gráficas à sequência $(5, 5, 4, 3, 2, 2, 1)$. Temos:

$$\begin{array}{ccccccc} 5, & \underline{5}, & 4, & 3, & 2, & 2, & 1 \\ & 4, & \underline{3}, & 2, & 1, & 1, & \\ & & 2, & 1, & 0, & 0, & 1 \\ & & & 2, & \underline{1}, & 1, & 0, & 0 \\ & & & & 0, & 0, & 0, & 0 \end{array}$$

A sequência $(0, 0, 0, 0)$ corresponde à sequência de graus do grafo simples



e, portanto é uma sequência gráfica. Aplicando sucessivamente o Teorema das Sequências Gráficas podemos concluir que a sequência $(5, 5, 4, 3, 2, 2, 1)$ também é gráfica.

- (b) A ordem de um grafo é o número dos seus vértices, n , que corresponde ao comprimento da sequência, ou seja, $n = 7$.

O tamanho, m , de um grafo $G = (X, U)$ é o seu número de arcos. Uma vez que a sequência é gráfica é a sequência de graus de G , pelo Teorema do Aperto de Mãos temos que

$$2m = \sum_{x \in X} d_G(x) = 5 + 5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 = 22 \Leftrightarrow 2m = 22 \Leftrightarrow m = 11.$$

- (c) Como para qualquer grafo simples se tem $d_G(x) + d_{\overline{G}}(x) = n - 1$ podemos afirmar que

$$d_{\overline{G}}(x) = n - 1 - d_G(x).$$

Assim, em $\overline{G}$ teremos 1 vértice de grau 5, 2 vértices de grau 4, 1 vértice de grau 3, 1 vértice de grau 2 e 2 vértices de grau 1. Concluimos então que a sequência de graus de $\overline{G}$ é

$$(5, 4, 4, 3, 2, 1, 1).$$

- (d) Numa árvore o número de vértices de grau 1 é sempre maior ou igual a dois. Em G há apenas um vértice de grau 1, logo G não é árvore. Por outro lado, numa árvore o número de arcos é sempre igual ao número de vértices menos um, $m = n - 1$. Em $\overline{G}$ temos 7 vértices (o mesmo número que em G) e, usando o Teorema do Aperto de Mãos, temos

$$2\overline{m} = \sum_{x \in X} d_{\overline{G}}(x) = 5 + 4 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 = 20 \Leftrightarrow 2\overline{m} = 20 \Leftrightarrow \overline{m} = 10 \neq n - 1 = 6.$$

Logo $\overline{G}$ também não é árvore.

2. (a) Para o Grafo dado temos:

$$\begin{array}{llll} d_G^+(x_1) = 1 & d_G^-(x_1) = 2 & \text{e} & d_G(x_1) = d_G^+(x_1) + d_G^-(x_1) = 1 + 2 = 3; \\ d_G^+(x_2) = 4 & d_G^-(x_2) = 0 & \text{e} & d_G(x_2) = d_G^+(x_2) + d_G^-(x_2) = 4 + 0 = 4; \\ d_G^+(x_3) = 1 & d_G^-(x_3) = 2 & \text{e} & d_G(x_3) = d_G^+(x_3) + d_G^-(x_3) = 1 + 2 = 3; \end{array}$$

$$d_G^+(x_4) = 1 \quad d_G^-(x_4) = 2 \quad \text{e} \quad d_G(x_4) = d_G^+(x_4) + d_G^-(x_4) = 1 + 2 = 3;$$

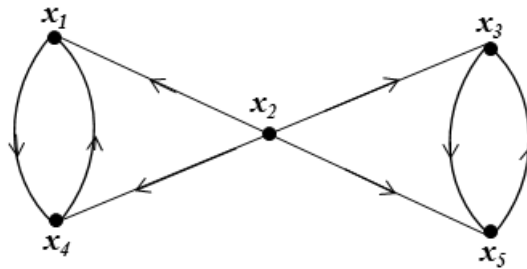
$$d_G^+(x_5) = 1 \quad d_G^-(x_5) = 2 \quad \text{e} \quad d_G(x_5) = d_G^+(x_5) + d_G^-(x_5) = 1 + 2 = 3.$$

Assim a sequência de graus exteriores de G é $(4, 1, 1, 1, 1)$, a sequência de graus interiores é $(2, 2, 2, 2, 0)$ e a sequência de graus é $(4, 3, 3, 3, 3)$.

- (b) As componentes conexas de um digrafo $G = (X, U)$ são os subgrafos gerados pelas classes de equivalência da relação R sobre X tal que:

$$xRy \Leftrightarrow \text{existe, em } G, \text{ a cadeia } x - y.$$

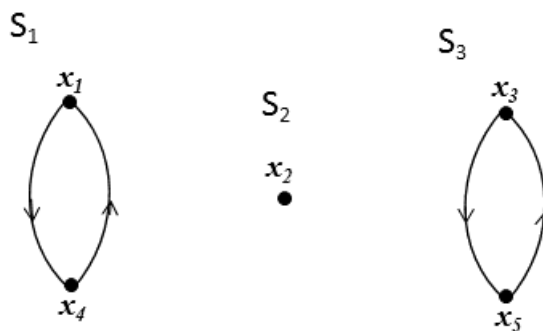
Para esta relação de equivalência temos uma única classe de equivalência $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Deste modo podemos concluir que G tem uma única componente conexa R_1 que é:



As componentes fortemente conexas de um digrafo $G = (X, U)$ são os subgrafos gerados pelas classes de equivalência da relação S sobre X tal que:

$$xSy \Leftrightarrow \text{existe, em } G, \text{ o caminho } x - y \text{ e o caminho } y - x.$$

Para esta relação de equivalência temos três classes de equivalência: $\{x_1, x_4\}$, $\{x_2\}$ e $\{x_3, x_5\}$. Deste modo podemos concluir que as componentes fortemente conexas de G são:



Dado que o grafo G tem uma única componente conexa podemos afirmar que G é um grafo conexo. Como G tem mais do que uma componente fortemente conexa, podemos concluir que G não é fortemente conexo.

- (c) Um grafo conexo G é euleriano se todos os seus vértices tiverem grau par e é semi euleriano se apenas tiver dois vértices de grau ímpar. Uma vez que G é um grafo conexo, para podermos concluir se é ou não euleriano teremos de considerar os graus dos seus vértices. Como sabemos pela alínea (a) que G tem 4 vértices de grau ímpar então G não é euleriano. Como G tem mais do que dois vértices de grau ímpar então G não é semi euleriano.
- (d) A matriz de adjacências de um digrafo $G = (X, U)$ é uma matriz $A = [a_{ij}]$ em que $a_{ij} = 1$ se $(x_i, x_j) \in U$ e $a_{ij} = 0$ caso contrário. Deste modo temos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sabemos que o número de caminhos $x_2 - x_1$ de comprimento 2 é dado por $(A^2)_{21}$. Este elemento obtém-se "multiplicando" a linha 2 de A pela coluna 1 de A :

$$(A^2)_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Logo o número de caminhos $x_2 - x_1$ em G é 1 e por isso existe um único caminho $x_2 - x_1$ de comprimento 2 em G .

3. Consideremos que $n_1 = |X_1|$ e que $n_2 = |X_2|$.

- (a) Atendendo a que cada vértice x de X_1 (respectivamente, de X_2) é adjacente em $G_1 + G_2$ aos vértices a que já era adjacente em G_1 (respectivamente, em G_2) e a todos os vértices de G_2 (respectivamente de G_1), temos que cada vértice x de X_1 vai ser adjacente a $d_{G_1}(x) + n_2$ vértices (respectivamente, $d_{G_2}(x) + n_1$ vértices). Assim,

$$d_{G_1+G_2}(x) = \begin{cases} d_{G_1}(x) + n_2 & \text{se } x \in X_1 \\ d_{G_2}(x) + n_1 & \text{se } x \in X_2 \end{cases}.$$

Dado que G_1 e G_2 são regulares de graus r e s respectivamente, temos ainda

$$d_{G_1+G_2}(x) = \begin{cases} r + n_2 & \text{se } x \in X_1 \\ s + n_1 & \text{se } x \in X_2 \end{cases}.$$

- (b) Para que $G_1 + G_2$ seja regular todos os seus vértices terão de ter o mesmo grau. Uma vez que só temos dois graus possíveis em $G_1 + G_2$, a condição a verificar para que $G_1 + G_2$ seja regular é que

$$r + n_2 = s + n_1.$$

- (c) $G_1 + G_2$ é um grafo conexo se $\forall x, y \in X_1 \dot{\cup} X_2$ existe, em $G_1 + G_2$, a cadeia $x - y$.

Sejam x e y vértices arbitrários de $X_1 \dot{\cup} X_2$.

CASO 1 - x e y pertencem à mesma classe de vértices.

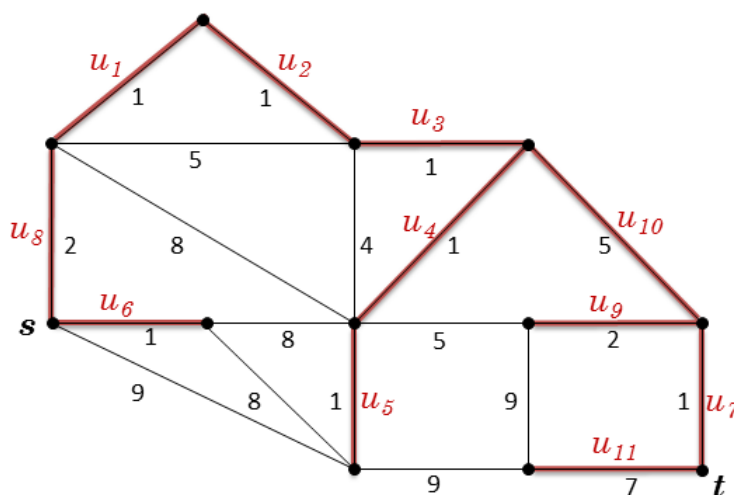
Se $x, y \in X_1$ (respectivamente, se $x, y \in X_2$) consideremos $z \in X_2$ (respectivamente, se $z \in X_1$). Pela definição de $G_1 + G_2$ existem, em $G_1 + G_2$, os arcos $\{x, z\}$ e $\{z, y\}$ logo $x, \{x, z\}, z, \{z, y\}, y$ é uma cadeia $x - y$ em $G_1 + G_2$.

CASO 2 - x e y pertencem a classes distintas de vértices.

Se $x \in X_1$ e $y \in X_2$ (respectivamente, se $x \in X_2$ e $y \in X_1$) então pela definição de $G_1 + G_2$ existe, em $G_1 + G_2$, o arco $\{x, y\}$ e, portanto existe a cadeia $x, \{x, y\}, y$ que é uma cadeia $x - y$ em $G_1 + G_2$.

Logo, $\forall x, y \in X_1 \dot{\cup} X_2$ existe, em $G_1 + G_2$, a cadeia $x - y$. Concluimos então que $G_1 + G_2$ é um grafo conexo.

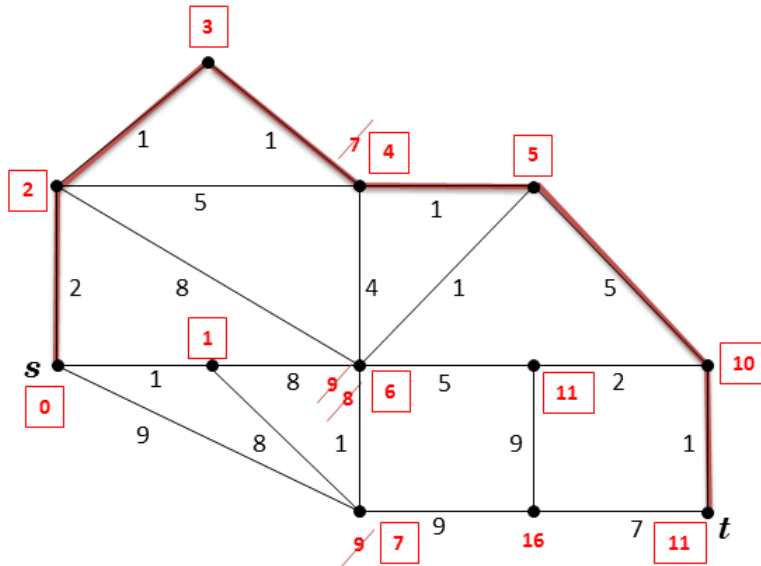
4. Por aplicação do algoritmo de Kruskal obtemos a seguinte árvore maximal de valor mínimo:



O valor desta árvore é dado pela soma dos valores nos arcos da árvore maximal obtida. Assim temos que o valor da árvore é

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 5 + 7 = 23.$$

5. Ao aplicarmos o Algoritmo da Cadeia mais Curta obtemos:



Dado que a etiqueta definitiva de t é 11 podemos afirmar que a cadeia mais curta $s - t$ tem comprimento 11. Os arcos da cadeia L encontram-se assinalados a encarnado.