

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

1. Seja G um digrafo conexo cuja matriz de adjacências para a marcação usual dos vértices é.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando apenas propriedades da matriz A ou das suas potências indique, justificando:

- [0,5] (a) A ordem e o tamanho de G .
- [1,0] (b) A sequência de graus interiores de G . Como concluir se G é fortemente conexo?
- [1,5] (c) O número de caminhos $x_1 - x_3$ de comprimento 3.
- [1,0] (d) Uma representação geométrica do grafo G e a matriz de adjacências de G em relação à marcação (x_2, x_4, x_1, x_3) dos seus vértices.

2. Considere o grafo 3-partido completo $K_{r,2r,3r}$ com classes de vértices X_r , X_{2r} e X_{3r} tais que $|X_r| = r$, $|X_{2r}| = 2r$ e $|X_{3r}| = 3r$.

- [1,5] (a) Determine o grau de cada vértice de $K_{r,2r,3r}$.
- [1,5] (b) Indique, justificando, condições para que $K_{r,2r,3r}$ seja euleriano.

- [3,0] 3. Um torneio é o grafo resultante da orientação de um grafo simples completo. Considere $G = (X, \mathcal{U})$ um torneio e seja $x \in X$ um vértice de G com grau exterior máximo. Mostre que para qualquer $y \in X$ existe em G um caminho $x - y$ de comprimento inferior ou igual a dois.

4. Considere os números inteiros $a = 420$ e $b = 990$. Determine, justificando:

- [1,5] (a) $d = \text{mdc}\{a, b\}$ usando o algoritmo de Euclides.
- [1,5] (b) Os coeficientes u e v tais que $d = ua + vb$.
- [1,0] (c) A *forma standard* de a .

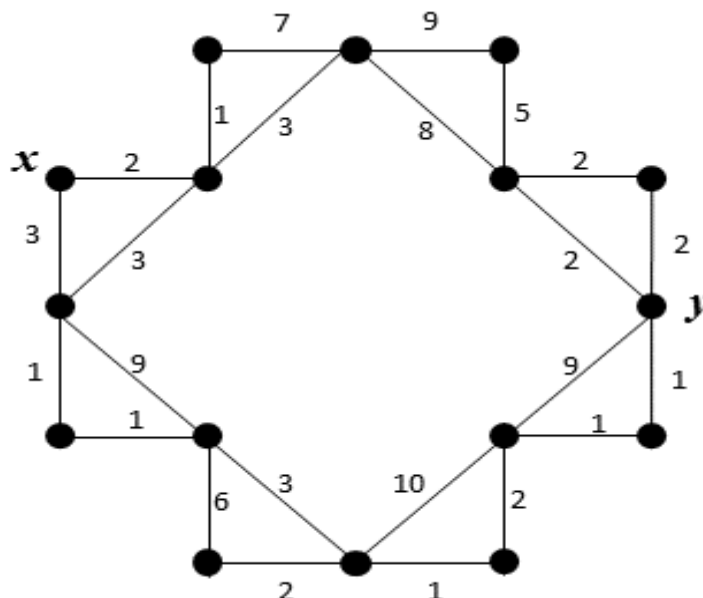
[Cotação]

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

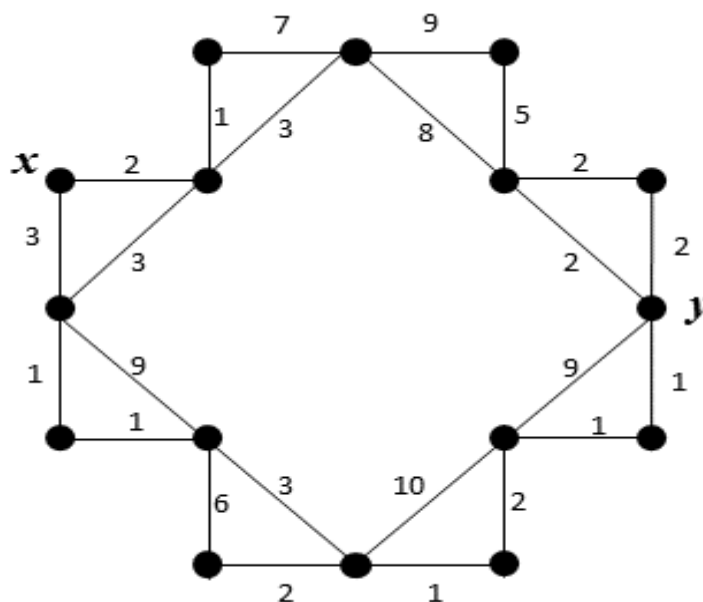
Número de aluno: Número de caderno:

- [3,0] 5. Usando o algoritmo de Prim a partir do vértice y , determine uma árvore maximal de valor mínimo para o seguinte grafo ponderado. Indique o valor da árvore obtida.



[Identifique os arcos, numerando-os pela ordem que os for escolhendo.]

- [3,0] 6. Considere o seguinte grafo ponderado:



Utilize o algoritmo da Cadeia mais Curta para determinar uma cadeia $x - y$ mínima L . Indique L e o seu valor. [Deve indicar explicitamente todas as atribuições efectuadas].

Fim

1. (a) A ordem, ou o número de vértices, de um digrafo coincide com o número de linhas (ou o número de colunas) da sua matriz de adjacências que neste caso é $n = 4$.

O tamanho, ou o número de arcos, de um digrafo coincide com o número de uns da sua matriz de adjacências que neste caso é $m = 6$.

- (b) O grau interior de um vértice x_i é dado pela soma dos elementos da coluna i , ou seja por $\sum_{k=1}^n a_{ki}$. Assim, temos $d^-(x_1) = 0$, $d^-(x_2) = 2$, $d^-(x_3) = 0$ e $d^-(x_4) = 2$, pelo que a sequência de graus interiores de G é $(2, 2, 2, 0)$. Uma vez que há um vértice com grau interior 0, tal vértice só poderá ser uma fonte ou um vértice isolado pelo que G nunca poderá ser fortemente conexo.

- (c) O número de caminhos $x_1 - x_3$ de comprimento 3 é dado pelo elemento 13 da matriz A^3 . Temos então que $A_{13}^3 = (A^2 \times A)_{13}$ = "linha 1 de $A^2 \times$ coluna 3 de A ".

Como a linha 1 de A^2 é dada por "linha 1 de $A \times$ matriz A " temos

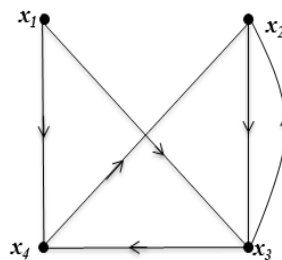
$$\text{Linha 1 de } A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$A_{13}^3 = (A^2 \times A)_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2.$$

Deste modo, podemos afirmar que o número de caminhos $x_1 - x_3$ de comprimento 3 é 2.

- (d) Uma representação geométrica do digrafo G é, por exemplo:



A matriz de G em relação à marcação (x_2, x_4, x_1, x_3) será dada por :

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. (a) Atendendo a que num grafo tripartido completo cada vértice de uma classe é adjacente a todos os vértices das outras duas classes temos:

- se $x \in X_r$ então $d_{K_{r,2r,3r}}(x) = 2r + 3r = 5r$;
- se $x \in X_{2r}$ então $d_{K_{r,2r,3r}}(x) = r + 3r = 4r$;
- se $x \in X_{3r}$ então $d_{K_{r,2r,3r}}(x) = r + 2r = 3r$.

Deste modo podemos concluir que:

$$d_{K_{r,2r,3r}}(x) = \begin{cases} 5r & \text{se } x \in X_r \\ 4r & \text{se } x \in X_{2r} \\ 3r & \text{se } x \in X_{3r} \end{cases}$$

- (b) Uma vez que um grafo tripartido completo é sempre conexo, para que $K_{r,2r,3r}$ seja euleriano apenas temos de exigir que todos os seus vértices tenham grau par.

Deste modo, será necessário que $5r$, $4r$ e $3r$ sejam números pares. Como 3 e 5 são ímpares para que $3r$ e $5r$ sejam números pares é necessário que r seja par. Observe-se que quando r é par também $4r$ é par.

Assim $K_{r,2r,3r}$ é euleriano para r par.

3. Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um torneio e seja $x \in X$ um vértice de G com grau exterior máximo.

Suponhamos com vista a um absurdo que existe um vértice $y \in X$ tal que todo o caminho $x - y$ em G tem comprimento maior que 2.

Então para todo o vértice $z \in \Gamma^+(x)$ temos $(z, y) \notin \mathcal{U}$. Como G é um torneio, se $(z, y) \notin \mathcal{U}$ então $(y, z) \in \mathcal{U}$. Podíamos assim garantir que se $z \in \Gamma^+(x)$ então $z \in \Gamma^+(y)$ e portanto $\Gamma^+(x) \subseteq \Gamma^+(y)$.

Como assumimos que não existem caminhos $x - y$ de comprimento inferior ou igual a dois, então o arco $(x, y) \notin \mathcal{U}$ mas, dado que G é torneio, tem-se $(y, x) \in \mathcal{U}$ ou seja $x \in \Gamma^+(y)$. Como $x \notin \Gamma^+(x)$ então $\Gamma^+(x) \subsetneq \Gamma^+(y)$ e, portanto, $d_G^+(y) > d_G^+(x)$ o que é absurdo visto, por hipótese, x ser um vértice de grau exterior máximo de G .

Concluimos então que se x é um vértice de G com grau exterior máximo, para qualquer $y \in X$ existe em G um caminho $x - y$ de comprimento inferior ou igual a dois.

4. (a) Por aplicação do algoritmo de Euclides obtemos:

$$990 = 2 \times 420 + 150$$

$$420 = 2 \times 150 + 120$$

$$150 = 1 \times 120 + 30$$

$$120 = 4 \times 30 + 0$$

Pelo algoritmo de Euclides o $\text{mdc}\{a, b\} = 30$ pois corresponde ao último resto não nulo da sequência de divisões inteiras.

- (b) Utilizando a alínea anterior obtemos:

$$30 = 150 - 1 \times 120$$

$$30 = 150 - 1 \times (420 - 2 \times 150) = -1 \times 420 + 3 \times 150$$

$$30 = -1 \times 420 + 3 \times (990 - 2 \times 420)$$

$$30 = 3 \times 990 - 7 \times 420$$

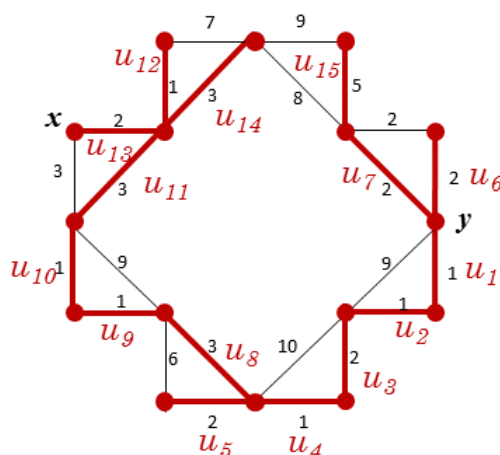
Assim, os coeficientes pedidos são $u = -7$ e $v = 3$.

(c) Determinando a decomposição em primos de 420 obtemos:

420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

Assim, *forma standard* de a é $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$.

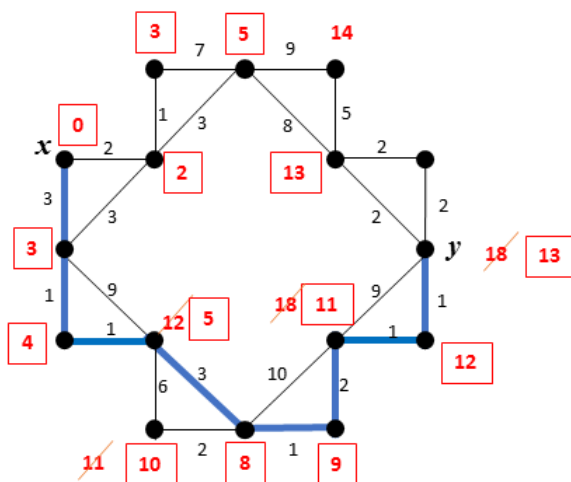
5. Por aplicação do algoritmo de Prim obtemos, por exemplo, a seguinte árvore maximal de valor mínimo:



O valor desta árvore é dado pela soma dos valores nos arcos da árvore maximal obtida. Assim temos que o valor da árvore é

$$1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 3 + 1 + 2 + 1 + 3 + 5 = 30.$$

6. Ao aplicarmos o Algoritmo da Cadeia mais Curta obtemos:



Dado que a etiqueta definitiva de y é 13 podemos afirmar que a cadeia mais curta $x - y$ tem comprimento 13. Os arcos da cadeia L encontram-se assinalados a azul.