FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Matemática Discreta
Exame de Recurso – 30 de Junho de 2017

[Cotação] ***Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.***

[2,0] **1.** Considere os conjuntos $X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ e $Y = \{\{c\}\}$. Determine o conjunto $\mathcal{P}(\bigcup X \times \bigcap Y)$.

2. Sobre o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ considere a relação binária $S = \{(1, 3), (2, 7), (6, 6)\}$ e a relação de equivalência R tal que $X/R = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6\}, \{7, 8\}\}$.

[1,0] (a) Represente a relação binária R por meio de um diagrama.

[1,0] (b) Determine S^{-1}, Dom S e Im S.

[0,5] (c) Indique os elementos de $R \circ S$.

3. Considere o conjunto $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ e o seu subconjunto $Y = \{b, c, d, e\}$. Considere a relação de ordem parcial sobre X definida por $S = \{(x, x) : x \in X\} \cup \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (c, e), (c, f)\}$.

[1,0] (a) Construa o diagrama de Hasse de S.

[1,5] (b) Indique, caso existam, os elementos majorantes, minorantes, supremo, ínfimo, máximo, mínimo, maximais e minimais do subconjunto Y do c.p.o. (X, S).

4. Considere a aplicação $g : [0, \pi] \longrightarrow [-\pi, \pi]$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x \in [0, \pi] \setminus \mathbb{Z} \\ x, & \text{se } x \in [0, \pi] \cap \mathbb{Z}. \end{cases}$$

[1,0] (a) Diga, justificando, se g é injectiva ou se é sobrejectiva.

[0,5] (b) Indique um conjunto X tal que $X \subseteq [0, \pi]$ e um conjunto Y tal que $Y \subseteq [-\pi, \pi]$ de forma a que $h : X \longrightarrow Y$ definida por $h(x) = g(x)$, para todo $x \in X$ é aplicação bijectiva.

[1,0] (c) Determine $g([n, n + 1])$, para $n \in \mathbb{N}_0$ e $0 \leq n \leq 2$.

[0,5] (d) Determine um conjunto X tal que $X \subseteq [0, \pi]$ e $g^{-1}(X) = \emptyset$.

5. Considere o conjunto Q das palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{x, y, z\}$ cujo comprimento é ímpar.

[2,0] (a) Defina indutivamente o conjunto Q.

[1,0] (b) Usando as regras de inferência do conjunto Q, prove que $xxx \in Q$.

6. Considere a sequência de inteiros $(5, 4, 3, k, 2, 1, 1, 1)$.

[0,5] (a) Indique, justificando, para que valores de k esta sequência poderá ser a sequência de graus de um grafo.

[1,5] (b) Para $k = 3$, usando o Algoritmo das Sequências Gráficas, prove que a sequência é gráfica e represente geometricamente um grafo simples que possua a sequência de graus indicada.

[2,0] **7.** Sejam $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples de ordem n com pelo menos dois vértices e $x, y \in X$. Prove que existe uma cadeia $x - y$ se, e só se, existe uma cadeia $x - y$ de comprimento n ou existe uma cadeia $x - y$ de comprimento $n + 1$.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:_____

Número de aluno: | | | | | | |

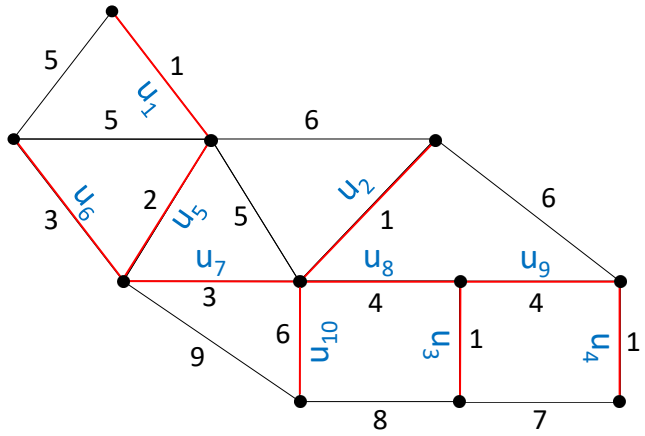
[1,5] **8.** Usando o algoritmo de **Kruskal**, determine uma árvore maximal de valor mínimo para o grafo ponderado G, identificando os arcos e numerando-os pela ordem em que os for escolhendo.

Preencha os espaços seguintes:

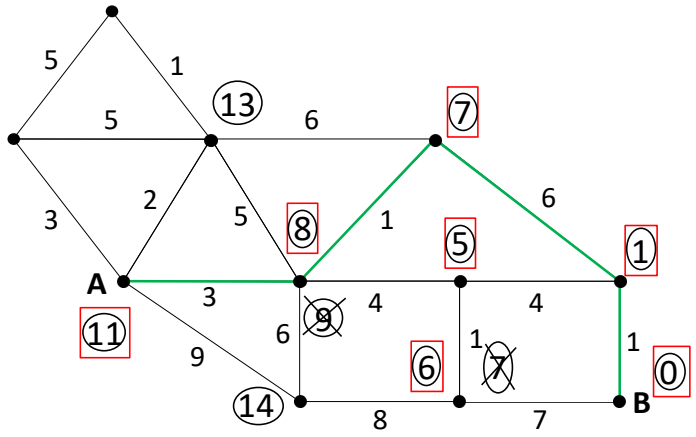
O grafo G é **conexo** pelo que é aplicável o algoritmo de Kruskal.

O grafo tem **11** vértices pelo que a árvore selecionada terá **10** arcos.

O valor da árvore obtida é $(\mathbf{1}+\mathbf{1}+\mathbf{1}+\mathbf{1})+\mathbf{2}+(\mathbf{3}+\mathbf{3})+(\mathbf{4}+\mathbf{4})+\mathbf{6}=\mathbf{26}$.



[1,5] **9.** Considere o seguinte grafo ponderado:



Utilize o algoritmo da **Cadeia mais Curta** para construir uma cadeia $B-A$ mínima L, indicando explicitamente todas as etiquetas atribuídas.

Preencha os espaços seguintes:

O grafo G é **conexo** pelo que é aplicável o algoritmo da Cadeia mais Curta.

O valor de L é $\mathbf{1}+\mathbf{6}+\mathbf{1}+\mathbf{3}=\mathbf{11}$.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Matemática Discreta

Exame de Recurso – 30 de Junho de 2017

Uma resolução com notas explicativas

1. Sendo $X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ e $Y = \{\{c\}\}$ então

$$\bigcup X = \{x \mid \exists_{A \in X} : x \in A\} = \emptyset \cup \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$$

e

$$\bigcap Y = \{y \mid \forall_{A \in Y}, y \in A\} = \{c\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left(\bigcup X\right) \times \left(\bigcap Y\right) &= \left\{(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\} \subseteq \mathcal{P}\left(\left(\bigcup X\right) \cup \left(\bigcap Y\right)\right) \ : \ x \in \bigcup X \ \wedge \ y \in \bigcap Y\right\} \\ &= \{(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\} \subseteq \mathcal{P}(\{a,b\} \cup \{c\}) \ : \ x \in \{a,b\} \ \wedge \ y \in \{c\}\} \\ &= \{(a,c),(b,c)\}.\end{aligned}$$

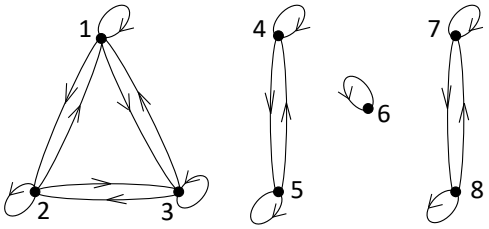
Logo

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\left(\left(\bigcup X\right) \times \left(\bigcap Y\right)\right) &= \left\{A \mid A \subseteq \left(\bigcup X\right) \times \left(\bigcap Y\right)\right\} \\ &= \{A \mid A \subseteq \{(a,c),(b,c)\}\} \\ &= \{\emptyset, \{(a,c)\}, \{(b,c)\}, \{(a,c),(b,c)\}\}.\end{aligned}$$

2. (a) Como R é uma relação de equivalência sobre X, logo **reflexiva** (para qualquer $x \in X$, $(x,x) \in R$), **simétrica** (para quaisquer $x, y \in X$, se $(x,y) \in R$ então $(y,x) \in R$) e **transitiva** (para quaisquer $x, y, z \in X$, se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$ então $(x,z) \in R$) e, o seu **conjunto quociente** (conjunto das classes de equivalência) é $X/R = \{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6\},\{7,8\}\}$, temos

$$R = \Delta_X = \{(x,x) | x \in R\} \cup \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(4,5),(5,4),(7,8),(8,7)\}$$

e, portanto, o diagrama correspondente será



(b) $S^{-1} = \{(x,y) \in X \times X \mid (y,x) \in S\} = \{(3,1),(7,2),(6,6)\}$.

Dom $S = \{x \in X \mid \exists_{y \in X} : (x,y) \in S\} = \{1,2,6\}$.

Im $S = \{y \in X \mid \exists_{x \in X} : (x,y) \in S\} = \{3,6,7\}$.

(c) $R \circ S = \{(x,z) \in X \times X \mid \exists_{y \in X} : (x,y) \in S \ \wedge \ (y,z) \in R\}$

S	$(1,3)$	$(2,7)$	$(6,6)$
R	$(3,3)(3,1)(3,2)$	$(7,7)(7,8)$	$(6,6)$
$R \circ S$	$(1,3)(1,1)(1,2)$	$(2,7)(2,8)$	$(6,6)$

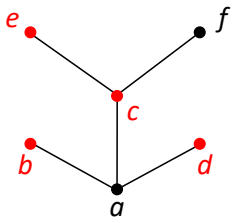
Logo $R \circ S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,7),(2,8),(6,6)\}$.

3. (a) Na relação S retiramos os pares ordenados do tipo (x,x) e do tipo (y,z), com $y \neq z$, e para os quais existe $w \in X$ tal que $y \neq w$, $z \neq w$ e (y,w), (w,z) são pares de S.

Assim sendo, ficamos com os pares ordenados

$$(a,b),(a,c),(a,d),(c,e),(c,f)$$

pelo que o diagrama de Hasse é



(b) Chamamos **majorante** (**minorante**) de Y a um elemento $x \in X$ tal que $(y,x) \in S$ ($(x,y) \in S$) para qualquer $y \in Y$.

Conjunto dos majorantes de Y $= \emptyset$. (**Conjunto dos minorantes de Y** $= \{a\}$.)

Chamamos **supremo** (**ínfimo**) de Y a um majorante $s \in X$ (a um minorante $i \in X$) tal que $(s,x) \in S$, para qualquer majorante x de Y. ($(x,i) \in S$, para qualquer minorante x de Y.)

Supremo de Y não existe.(**Ínfimo de Y** $= a$.)

Chamamos **máximo** (**mínimo**) de Y a um elemento $z \in Y$ tal que $(y,z) \in S$ ($(z,y) \in S$), para qualquer $y \in Y$.

Máximo de Y - não existe.(**Mínimo de Y** - não existe.)

Chamamos **elemento minimal** (**elemento maximal**) de Y a um elemento $z \in Y$ tal que não existe $y \in Y \setminus \{z\}$ com $(y,z) \in S$. ($(z,y) \in S$.)

Conjunto dos elementos minimais de Y $= \{b,c,d\}$. (**Conjunto dos elementos maximais de Y** $= \{b,e,d\}$.)

4. (a) Para g ser injectiva temos de ter

$$x \neq y \;\Rightarrow\; g(x) \neq g(y), \quad \text{para quaisquer} \;\; x,y \in [0,\pi].$$

- Se $x,y \in [0,\pi] \setminus \mathbb{Z} = [0,\pi] \setminus \{0,1,2,3\}$ são tais que $x \neq y$ então $g(x) = -x \neq -y = g(y)$.
- Se $x,y \in [0,\pi] \cap \mathbb{Z} = \{0,1,2,3\}$ são tais que $x \neq y$ então $g(x) = x \neq y = g(y)$.
- Se $x \in [0,\pi] \setminus \mathbb{Z}$ e $y \in [0,\pi] \cap \mathbb{Z}$ então $x \neq y$ pois $([0,\pi] \setminus \mathbb{Z}) \cap ([0,\pi] \cap \mathbb{Z}) = \emptyset$ donde

$$g(x) = -x \neq y = g(y) \;\; \text{pois} \;\; -x < 0 \;\; \text{e} \;\; y \geq 0.$$

Logo g **é injectiva**.

Para g ser sobrejectiva temos de ter $g([0,\pi]) = [-\pi,\pi]$. Ora

$$g([0,\pi] \setminus \mathbb{Z}) = [-\pi,0] \setminus \mathbb{Z} = [-\pi,0] \setminus \{-3,-2,-1,0\}$$

e

$$g([0,\pi] \cap \mathbb{Z}) = g(\{0,1,2,3\}) = \{0,1,2,3\}$$

donde

$$g([0,\pi]) = ([-\pi,0] \setminus \{-3,-2,-1,0\}) \cup \{0,1,2,3\} \neq [-\pi,\pi].$$

Assim verificamos que g **não é sobrejectiva**.

(b) Se considerarmos $X = [0,\pi]$ e $Y = ([-\pi,0] \setminus \{-3,-2,-1,0\}) \cup \{0,1,2,3\}$ temos que h é injectiva e sobrejectiva de acordo com alínea (a) pois

$$x \neq y \;\Rightarrow\; h(x) = g(x) \neq g(y) = h(y), \quad \text{para quaisquer} \;\; x, y \in X$$

e

$$h([0,\pi]) = g([0,\pi]) = Y.$$

(c) Temos que $[n,n+1] \setminus \mathbb{Z} =]n,n+1[$ pois os únicos inteiros no intervalo de números reais $[n,n+1]$ são n e $n+1$. De acordo com a definição de g temos

$$g([n,n+1] \setminus \mathbb{Z}) = g(]n,n+1[) =]-(n+1),-n[$$

e

$$g([n,n+1] \cap \mathbb{Z}) = g(\{n,n+1\}) = \{n,n+1\}$$

donde

$$g([n,n+1]) =]-(n+1),-n[\cup \{n,n+1\}, \quad \text{para qualquer} \;\; n \in \mathbb{N}_0 \;\; \text{e} \;\; 0 \leq n \leq 2.$$

(d) Por definição, $g^{-1}(X) = \{x \in [0,\pi] : g(x) \in X\}$. Se tomarmos $X = [0,\pi] \setminus \{0,1,2,3\}$ então $g^{-1}(X) = \emptyset$ pois

$$X \cap g([0,\pi]) = ([0,\pi] \setminus \{0,1,2,3\}) \cap [([-\pi,0] \setminus \{-3,-2,-1,0\}) \cup \{0,1,2,3\}] = \emptyset.$$

5. (a) Para definir indutivamente um conjunto necessitamos de axiomas e regras. Neste caso, bastar-nos-á três axiomas e uma regra que são:

Axioma 1: $x \in Q$;

Axioma 2: $y \in Q$;

Axioma 3: $z \in Q$;

Regra: $(w \in Q \;\wedge (a,b \in \Sigma)) \Rightarrow \text{conc}_b(\text{conc}_a(w)) \in Q$.

As regras de inferência deste conjunto podem ser representadas do seguinte modo:

$$\frac{}{x \in Q}, \quad \frac{}{y \in Q}, \quad \frac{}{z \in Q} \quad \text{e} \quad \frac{w \in Q \;\wedge (a,b \in \Sigma)}{\text{conc}_b(\text{conc}_a(w)) \in Q}$$

(b) Usando uma pirâmide de regras de inferência vejamos que a nossa proposição, $xxx \in Q$, está na base da pirâmide e, no topo, temos um axioma da definição indutiva de Q. Denotemos xxx por $\text{conc}_x(\text{conc}_x(x))$.

$$\frac{\overline{x \in Q} \;\wedge x \in \Sigma}{\text{conc}_x(\text{conc}_x(x))}$$

e, portanto, a nossa proposição é verdadeira, isto é, $xxx \in Q$.

6. Considere a sequência de inteiros $(5, 4, 3, k, 2, 1, 1, 1)$.

(a) Para ser sequência de graus de um grafo simples a sequência tem de estar por ordem não crescente, logo $k \in \{2, 3\}$. Como temos apenas 5 ímpares na sequência e, pelo Teorema do Aperto de Mãos, o número de vértices de grau ímpar é par então k tem de tomar o valor 3.

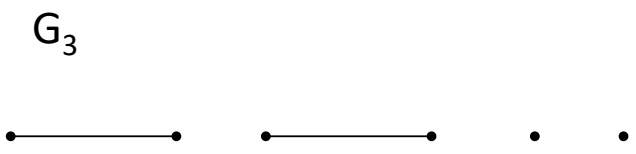
(b) Determinemos se a sequência $(5, 4, 3, 3, 2, 1, 1, 1)$ é uma sequência gráfica.

Tem-se:

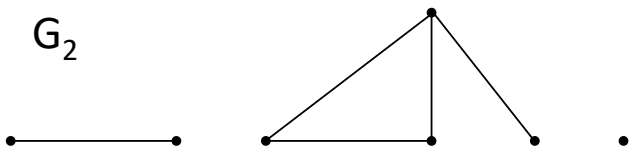
$$\begin{array}{rcr} S_1 & : & 5, \underline{4, 3, 3, 2, 1}, 1, 1 \\ S_1' & : & 3, 2, 2, 1, 0, 1, 1 \\ S_2 & : & 3, \underline{2, 2, 1}, 1, 1, 0 \\ S_2' & : & 1, 1, 0, 1, 1, 0 \\ S_3 & : & 1, 1, 1, 1, 0, 0 \end{array}$$

em que de S_i para S_i', $i \in \{1, 2\}$, se aplicou o Algoritmo das Sequências Gráficas e de S_i' para S_{i+1}, $i \in \{1, 2\}$, se ordenou a sequência por ordem não crescente.

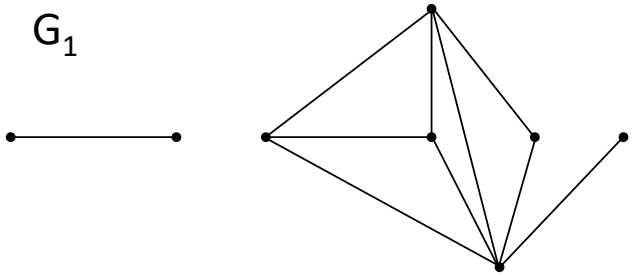
Embora possamos continuar a aplicar o Algoritmo, concluímos facilmente que S_3 é uma sequência gráfica, pois o grafo simples G_3 tem S_3 como sequência de graus.



Atendendo à primeira parte da demonstração do Algoritmo, podemos construir um grafo simples G_2 cuja sequência de graus é S_2. Teremos de acrescentar um novo vértice e torná-lo adjacente a 2 vértices de grau 1 e a outro vértice de grau 0.



Acrescentando um novo vértice a G_2 e tornando tal vértice adjacente a 5 vértices, nomeadamente ao vértice com grau 3, aos dois vértices com grau 2, a um dos vértices de grau 1 e ao vértice de grau 0, obtemos um grafo G_1 cuja sequência de graus é S_1.



7. Sejam $G = (X,\mathcal{U})$ um grafo simples com pelo menos dois vértices e $x, y \in X$.

É imediato que se existe uma cadeia $x - y$ de comprimento n ou existe uma cadeia $x - y$ de comprimento $n + 1$ então existe uma cadeia $x - y$.

Suponhamos agora que existe uma cadeia $x - y$. Então, por um teorema, existe uma cadeia elementar (com todos os vértices distintos, à excepção de x e y que podem coincidir se a cadeia for fechada) $x - y$.

Observemos que se G tem ordem n então uma cadeia elementar tem, no máximo, comprimento $n - 1$, se for aberta, ou comprimento n, se for fechada.

Assim, consideremos $x - y$ a cadeia elementar, digamos

$$x, u_1, \ldots, z, u_k, y$$

de comprimento t, com $t \leq n$. Então

$$x, u_1, \ldots, z, u_k, y, u_k, z, u_k, y$$

é uma cadeia $x - y$ de comprimento $t + 2$ e, analogamente,

$$x, u_1, \ldots, z, u_k, y, u_k, z, u_k, y, u_k, z, u_k, y, \ldots, u_k, z, u_k, y$$

é uma cadeia $x - y$ de comprimento $t + 2p$, onde $2p$ é o número de repetições do arco u_k.

Assim, se t e n tiverem a mesma paridade podemos construir uma cadeia $x - y$ de comprimento n ou uma cadeia $x - y$ de comprimento $n + 1$ caso t e n tenham paridades distintas.