FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Matemática Discreta
Primeiro Teste – 3 de Abril de 2017

[Cotação] Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

1. Considere os conjuntos $A = \{\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,c,d\}\}$, $B = \{\{a,b,c\},\{a,b,c,d\}\}$ e $C = \{\{1\},\{\{1\}\}\}$. Represente, em extensão, os conjuntos seguintes:

[1,5] (a) $\bigcup B$.

[1,5] (b) $(\bigcup(A \setminus B)) \times C$.

[1,5] (c) $\mathcal{P}(C)$.

2. Sejam A e B subconjuntos de um conjunto S.

[2,5] (a) Mostre, utilizando tabelas de verdade, que

$$A' \setminus B = (A \cup B)'.$$

[2,5] (b) Mostre, formalmente, a lei de De Morgan

$$(A \cup B)' = A' \cap B'.$$

3. Sobre o conjunto $X = \{1,2,3,4,5\}$ considere a relação $S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$ e a relação R tal que a sua matriz de adjacências é

$$A_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

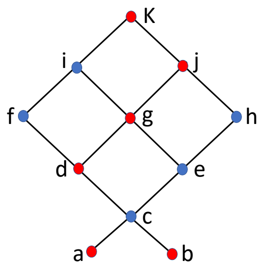
[1,5] (a) Indique o conjunto dos pares da relação R.

[1,5] (b) Represente a relação S por meio de um diagrama.

[2,0] (c) Determine Dom S, S^{-1} e $R \circ S$.

[2,5] (d) Justifique, usando os elementos de R, que a relação R é uma relação de equivalência e determine X/R.

[3,0] **4.** Considere o conjunto $X = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k\}$, o seu subconjunto $Y = \{c,e,f,h,i\}$ e a relação de ordem parcial $\leq$ sobre X definida pelo diagrama de Hasse:



Indique, se existirem, os elementos majorantes, ínfimo, máximo, minimais do subconjunto Y do conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$.

Fim

1. Sendo $A = \{\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,c,d\}\}$, $B = \{\{a,b,c\},\{a,b,c,d\}\}$ e $C = \{\{1\},\{\{1\}\}\}$.

(a) $\bigcup B = \{x \mid \exists_{X\in B} : x \in X\} = \{a,b,c\} \cup \{a,b,c,d\} = \{a,b,c,d\}$.

(b) $A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\} = \{\{a,b\}\}$,

$\bigcup(A\setminus B) = \{x \mid \exists_{X\in A\setminus B} : x \in X\} = \{a,b\}$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\left(\bigcup(A\setminus B)\right)\times C &= \left\{(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}\subseteq \mathcal{P}\left(\left(\bigcup(A\setminus B)\right)\cup C\right) \ : \ x\in \bigcup(A\setminus B) \ \wedge \ y \in C\right\}\\ &= \{(a,\{1\}),(a,\{\{1\}\}),(b,\{1\}),(b,\{\{1\}\})\}.\end{aligned}$$

(c) $\mathcal{P}(C) = \{X \mid X \subseteq C\} = \{\emptyset, \{\{1\}\}, \{\{\{1\}\}\}, C\}$.

2. (a) Usando tabela de verdade temos:

$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{A'}$	$\mathbf{A'\setminus B}$	$=$	$\mathbf{A\cup B}$	$(\mathbf{A\cup B})'$
1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0	1
(1)	**(1)**	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(2)**	**(3)**

(b) Queremos mostrar que

$$(A\cup B)' = A' \cap B'.$$

Assim temos:

$$\begin{aligned} x \in (A\cup B)' \quad &\Leftrightarrow \quad (\text{definição de } X')\\ x \notin (A\cup B) \quad &\Leftrightarrow \quad (\text{definição de } \cup)\\ x\notin A \ \wedge \ x \notin B \quad &\Leftrightarrow \quad (\text{definição de } X')\\ x\in A' \ \wedge \ x \in B' \quad &\Leftrightarrow \quad (\text{definição de } \cap)\\ x \in (A'\cap B') \quad & \end{aligned}$$

Podemos então afirmar que $x \in (A\cup B)'$ se, e só se, $x \in (A'\cap B')$.
Concluímos assim que $(A\cup B)' = A'\cap B'$.

3. Dadas sobre $X = \{1,2,3,4,5\}$, a relação binária $S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$ e a relação R tal que a sua matriz de adjacências é

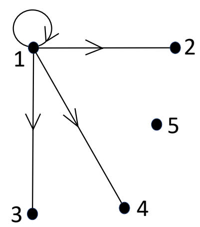
$$A_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

temos:

(a) O conjunto dos pares da relação R é $\{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)\}$ pois

$$(A_R)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } (i,j)\in R;\\ 0, & \text{se } (i,j)\notin R.\end{cases}$$

(b) A representação de S por meio de um diagrama.



(c) Dom $S = \{x \in X \mid \exists_{y \in X} : (x,y) \in S\} = \{1\}$.

$S^{-1} = \{(x,y) \in X \times X \mid (y,x) \in S\} = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$.

$R \circ S = \{(x,z) \in X \times X \mid \exists_{y \in X} : (x,y) \in S \ \wedge \ (y,z) \in R\}$

S	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$
R	$(1,1)$	$(2,2)(2,3)$	$(3,2)(3,3)$	$(4,4)(4,5)$
$R \circ S$	$(1,1)$	$(1,2)(1,3)$	$(1,2)(1,3)$	$(1,4)(1,5)$

Logo $R \circ S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5)\}$.

(d) $\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\} \subseteq R$, logo R é **reflexiva**.

$R^{-1} = \Delta_X \cup \{(3,2),(2,3),(5,4),(4,5)\} = R$, logo R é **simétrica**.

$R \setminus \Delta_X$	$(2,3)$	$(3,2)$	$(4,5)$	$(5,4)$
$R \setminus \Delta_X$	$(3,2)$	$(2,3)$	$(5,4)$	$(4,5)$
$(R \setminus \Delta_X) \circ (R \setminus \Delta_X)$	$(2,2)$	$(3,3)$	$(4,4)$	$(5,5)$

Assim $(R \setminus \Delta_X) \circ (R \setminus \Delta_X) = \Delta \setminus \{(1,1)\} \subseteq R$ e, portanto, R é **transitiva**.

Como R é reflexiva, simétrica e transitiva então é uma relação de **equivalência** sobre X.

$X/R = \{[a]_R \mid a \in X\}$ é o **conjunto quociente**, isto é, o conjunto das classes de equivalência.

Ora para qualquer $a \in X$, $[a]_R = \{x \in X \mid (x,a) \in R\}$ donde

$[1]_R = \{x \in X \mid (x,1) \in R\} = \{1\}$,

$[2]_R = \{x \in X \mid (x,2) \in R\} = \{2,3\} = [3]_R$,

$[4]_R = \{x \in X \mid (x,4) \in R\} = \{4,5\} = [5]_R$.

Assim $X/R = \{\{1\},\{2,3\},\{4,5\}\}$.

4. Chamamos **majorante** (**minorante**) de Y a um elemento $x \in X$ tal que $y \leq x$ ($x \leq y$) para qualquer $y \in Y$.

Conjunto dos majorantes de Y $= \{k\}$. (**Conjunto dos minorantes de Y** $= \{a,b,c\}$.)

Chamamos **ínfimo** de Y ao maior dos minorantes.

Ínfimo de Y $= c$.

Chamamos **máximo** de Y a um elemento $z \in Y$ tal que $y \leq z$ para qualquer $y \in Y$.

Máximo de Y - não existe.

Chamamos **elemento minimal** de Y a um elemento $z \in Y$ tal que não existe $y \in Y \setminus \{z\}$ com $y \leq z$.

Conjunto dos elementos minimais de Y $= \{c\}$.