FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Matemática Discreta
Segundo Teste – 8 de Maio de 2017

[Cotação] **Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.**

1. Considere a aplicação $f : [0,10] \longrightarrow [0,10]$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in [0,10] \setminus \mathbb{N}_0 \\ 0, & \text{se } x \in [0,10] \cap \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

[2,0] (a) Diga, justificando, se f é injectiva ou se é sobrejectiva.

[2,0] (b) Indique um conjunto X tal que $X \subseteq [0,10]$ e $g : X \longrightarrow [0,10]$ definida por $g(x) = f(x)$, para todo $x \in X$ é aplicação injectiva.

[2,0] (c) Determine $f([n, n+1])$, para $n \in \mathbb{N}_0$ e $1 \leq n \leq 9$.

[1,0] (d) Determine um conjunto X tal que $X \subseteq [0,10]$ e $f^{-1}(X) = \emptyset$

2. Sejam X e Y conjuntos e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação arbitrária. Indique, justificando, o valor lógico das afirmações seguintes:

[1,0] (a) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$, para todo o subconjunto B de Y.

[1,0] (b) $f^{-1}(f(A)) = A$, para todo o subconjunto A de X.

[2,0] **3.** Considere a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $u_1 = 6$, $u_2 = 27$ e $u_n = 6u_{n-1} - 9u_{n-2}$, para $n \geq 3$.
Mostre, utilizando o 2º Princípio de Indução, que $u_n = (n+1)3^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

4. Considere o conjunto $A = \{(2n+1, 3) : n \in \mathbb{N}_0\}$.

[2,0] (a) Defina indutivamente o conjunto A.

[1,5] (b) Usando as regras de inferência do conjunto A, prove que $(5,3) \in A$.

5. Seja S o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a\}$.

[2,0] (a) Defina indutivamente o conjunto S.

[2,0] (b) Indique equações que definam recursivamente a função $f : S \longrightarrow \{0, \pi\}$ tal que

$$f(w) = \begin{cases} 0, & \text{se o comprimento da palavra } w \text{ é par} \\ \pi, & \text{se o comprimento da palavra } w \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

[1,5] (c) Prove que as equações obtidas na alínea anterior definem uma função.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Matemática Discreta
Segundo Teste – 8 de Maio de 2017
Uma resolução com notas explicativas

1. Seja $f : [0, 10] \longrightarrow [0, 10]$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in [0, 10] \setminus \mathbb{N}_0 \\ 0, & \text{se } x \in [0, 10] \cap \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

(a) Ora $[0, 10] \cap \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ e como, por definição de f, $f(0) = f(1) = \cdots = f(10) = 0$ então f não é injectiva.
Por definição de f, $f([0, 10]) = [0, 10] \setminus \{1, \ldots, 10\} \subsetneq [0, 10]$, logo f também não é sobrejectiva.

(b) Se considerarmos $X = [0, 10] \setminus \mathbb{N}_0$ como, por definição de f, $f(x) = x$, para qualquer $x \in X$ temos $g : X \longrightarrow [0, 10]$, definida por $g(x) = f(x)$, para todo $x \in X$ é injectiva pois, para quaisquer $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} g(x) = g(y) \quad &\Rightarrow \quad (\text{definição de } g) \\ f(x) = f(y) \quad &\Rightarrow \quad (\text{definição de } f) \\ x = y. \quad & \end{aligned}$$

(c) Pela maneira como f está definida $f([n, n+1]) =]n, n+1[\cup \{0\}$ pois $f(n) = f(n+1) = 0$ e n, $n+1$ são os únicos elementos de $\mathbb{N}_0$ em $[n, n+1]$ ($f(]n, n+1[) =]n, n+1[$), para $n \in \mathbb{N}_0$ e $1 \leq n \leq 9$.

(d) Consideremos $X = \{1, \ldots, 10\} \subseteq [0, 10]$. Ora $f^{-1}(X) = \{x \in [0, 10] \ : \ f(x) \in X\} = \emptyset$ pois, pela definição de f, $f([0, 10] \setminus \mathbb{N}_0) = [0, 10] \setminus \{0, 1, \ldots, 10\}$ e, portanto, $f([0, 10] \setminus \mathbb{N}_0) \cap X = \emptyset$ e, $f([0, 10] \cap \mathbb{N}_0) = \{0\}$, donde $f([0, 10] \cap \mathbb{N}_0) \cap X = \emptyset$.

2. Sejam X e Y conjuntos e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação arbitrária.

[1,0] (a) Vejamos que a afirmação $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$, para todo o subconjunto B de Y é verdadeira.
Seja $B \subseteq Y$ arbitrário. Por definição

$$f^{-1}(Y \setminus B) = \{x \in X \ : \ f(x) \in Y \setminus B\}$$

e

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \ : \ f(x) \in B\}.$$

Seja $x \in X$ arbitrário. Ora

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(Y \setminus B) \quad &\Leftrightarrow \quad (\text{definição de imagem recíproca}) \\ x \in X \wedge f(x) \in Y \setminus B \quad &\Leftrightarrow \quad (\text{definição de complementar}) \\ x \in X \wedge (f(x) \in Y \wedge f(x) \notin B) \quad &\Leftrightarrow \quad (\text{definição de imagem recíproca}) \\ x \in X \wedge x \notin f^{-1}(B) \quad &\Leftrightarrow \quad (\text{definição de complementar}) \\ x \in X \setminus f^{-1}(B) \quad & \end{aligned}$$

donde podemos concluir que, para qualquer $x \in X$, $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ se, e só se, $x \in X \setminus f^{-1}(B)$.
Assim $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ e, como tomámos $B \subseteq Y$ arbitrário, concluímos que a afirmação é verdadeira.

(b) A afirmação $f^{-1}(f(A)) = A$, para todo o subconjunto A de X é falsa como se pode verificar através do seguinte exemplo: sejam

$$X = \{1, 2, 3, 4\}, \ A = \{3, 4\}, \ Y = \{a, b\} \ \text{ e } \ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & b \end{pmatrix}.$$

Ora

$$f(A) = Y, \ f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(Y) = X \ \text{ e } \ X \neq A.$$

3. A sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é definida por recorrência por $u_1 = 6$, $u_2 = 27$ e $u_n = 6u_{n-1} - 9u_{n-2}$, para $n \geq 3$.

Vejamos que $u_n = (n+1)3^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$S = \{n \in \mathbb{N} \ : \ u_n = (n+1)3^n\} = \mathbb{N}.$$

Provemos que $S = \mathbb{N}$ utilizando o 2º Princípio de Indução.

(Base de Indução) $1 \in S$ pois $(1+1)3^1 = 2 \cdot 3 = 6 = u_1$ e $2 \in S$ pois $(2+1)3^2 = 3 \cdot 9 = 27 = u_2$.

(Hipótese de Indução) Suponhamos que para $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ se tem $u_t = (t+1)3^t$, para qualquer $t \in \{1, \ldots, n\}$, isto é, $t \in S$, para qualquer $t \in \{1, \ldots, n\}$.

Vejamos que $n+1 \in S$. Pela fórmula de recorrência pois $n \geq 2$, logo $n+1 \geq 3$ e, pela hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 6u_n - 9u_{n-1} \\ &= 6(n+1)3^n - 9[(n-1)+1]3^{n-1} \\ &= 2(n+1)3^{n+1} - n3^{n+1} \\ &= [2(n+1) - n]3^{n+1} \\ &= [(n+1)+1]3^{n+1} \end{aligned}$$

donde $n+1 \in S$.

Assim, pelo 2º Princípio de Indução, $S = \mathbb{N}$ e, portanto, $u_n = (n+1)3^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

4. Seja $A = \{(2n+1, 3) : n \in \mathbb{N}_0\}$.

(a)

$$\begin{aligned} A &= \{(2\cdot 0+1, 3), (2\cdot 1+1, 3), \ldots, (2\cdot n+1, 3), \ldots\} \\ &= \{(1,3), (3,3), \ldots, (2\cdot n+1, 3), \ldots\} \end{aligned}$$

Podemos definir indutivamente A como se segue:

Axioma: $(1,3) \in A$.

Regra: Se $(n,3) \in A$, então $(\mathrm{suc}(\mathrm{suc}(n)), 3) \in A$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

(b) As regras de inferência de A são as seguintes:

$$\frac{}{(1,3) \in A} \quad \text{e} \quad \frac{(n,3) \in A}{(\mathrm{suc}(\mathrm{suc}(n)), 3) \in A}.$$

Usando uma pirâmide de regras de inferência vejamos que a nossa proposição, $(5,3) \in A$, está na base da pirâmide e, no topo, temos o único axioma da definição indutiva de A. Denotemos $(5,3)$ por $(\mathrm{suc}(\mathrm{suc}(\mathrm{suc}(\mathrm{suc}(1)))), 3)$.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{(1,3) \in A}}{(\mathrm{suc}(\mathrm{suc}(1)), 3) \in A}}{(\mathrm{suc}(\mathrm{suc}(\mathrm{suc}(\mathrm{suc}(1)))), 3) \in A}$$

e, portanto, a nossa proposição é verdadeira, isto é, $(5,3) \in A$.

5. Seja S o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a\}$.

(a) Podemos definir indutivamente S da seguinte forma:

Axioma: $\varepsilon \in S$.

RegraConc: Se $w \in S$, então $\mathrm{conc}_a(w) \in S$.

(b) Vamos indicar equações que definem recursivamente a função $f : S \longrightarrow \{0, \pi\}$ tal que

$$f(w) = \begin{cases} 0, & \text{se o comprimento da palavra } w \text{ é par} \\ \pi, & \text{se o comprimento da palavra } w \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

As equações que definem f são as seguintes:

- $f(\varepsilon) = 0$.
- $f(\text{conc}_a(w)) = \pi - f(w)$, para qualquer $w \in S$.

(c) Ora as equações anteriores definem uma função $f : S \longrightarrow \{0, \pi\}$ se, e só se,

$$\forall_{w \in S}\ \exists^1_{t \in \{0,\pi\}}\ :\ f(w) = t,$$

isto é, se e só se

$$R = \{w \in S\ :\ \exists^1_{t \in \{0,\pi\}},\ f(w) = t\} = S.$$

Vamos provar, pelo Princípio de Indução Estrutural, que $R = S$.

(Elementos básicos) O único elemento básico de S é ε, a palavra vazia. Como, pela primeira equação que define f temos $f(\varepsilon) = 0$ então existe um único $t \in \{0, \pi\}$ $(t = 0)$ tal que $f(\varepsilon) = t$ donde $\varepsilon \in R$.

(Regras) Suponhamos que $w \in R$, isto é, existe um único $t \in \{0, \pi\}$ tal que $f(w) = t$.

Pela 2ª equação que define f temos $f(\text{conc}_a(w)) = \pi - f(w)$ e, como existe um único $t \in \{0, \pi\}$ tal que $f(w) = t$, temos $f(\text{conc}_a(w)) = \pi - t$. Ora $t \in \{0, \pi\}$ donde $t = 0$ e, nesse caso, $\pi - t = \pi$ ou $t = \pi$ e vem $\pi - t = 0$. Assim concluímos que existe um único $t' \in \{0, \pi\}$ $(t' = \pi - t)$ tal que $f(\text{conc}_a(w)) = t'$ donde $\text{conc}_a(w) \in R$.

Logo a única regra que define indutivamente S é uma R-regra e, portanto, pelo Princípio de Indução Estrutural, $R = S$, isto é, as nossas equações definem f como função.