FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Matemática Discreta
Terceiro Teste – 6 de Junho de 2017

[Cotação] ***Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.***

1. Considere a sequência de inteiros $(5, k, 3, 3, 2, 1, 1, 1)$.

[1,0] (a) Indique, justificando, para que valores de k esta sequência poderá ser a sequência de graus de um grafo.

[3,0] (b) Para $k = 4$, usando o Algoritmo das Sequências Gráficas, prove que a sequência é gráfica e represente geometricamente um grafo simples que possua a sequência de graus indicada.

[2,5] **2.** Considere uma árvore T com ordem 18 e sequência de graus $(5^p, x^{18-p})$. Determine o tamanho de T e os valores de x e de p.

3. Considere o digrafo $G = (X, \mathcal{U})$ tal que $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e cuja matriz de adjacências para a marcação usual é

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

[1,0] (a) Determine a sequência de graus exteriores, a sequência de graus interiores e a sequência de graus de G.

[0,5] (b) Diga, justificando, se G tem poços, fontes ou vértices isolados.

[1,5] (c) Indique, justificando, se G é conexo ou fortemente conexo.

[1,5] (d) Justifique se G é euleriano ou semi-euleriano.

[1,0] (e) Utilize a matriz de adjacências de G para justificar que existem dois sucessores simultâneos aos vértices x_2 e x_4.

[2,0] **4.** Sejam G uma árvore com pelo menos três vértices e $(d_n, d_{n-1}, \ldots, d_2, d_1)$ a sequência de graus de G tal que $d_3 > d_2 = 1$. Justifique que G é um grafo cadeia.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:_____

Número de aluno: | | | | | | |

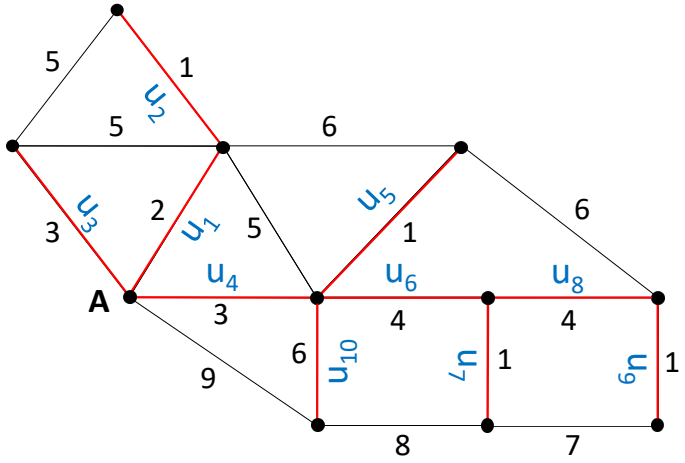
[3,0] **5.** Usando o algoritmo de **Prim**, a partir do vértice A, determine uma árvore maximal de valor mínimo para o grafo ponderado G, identificando os arcos e numerando-os pela ordem em que os for escolhendo.

Preencha os espaços seguintes:

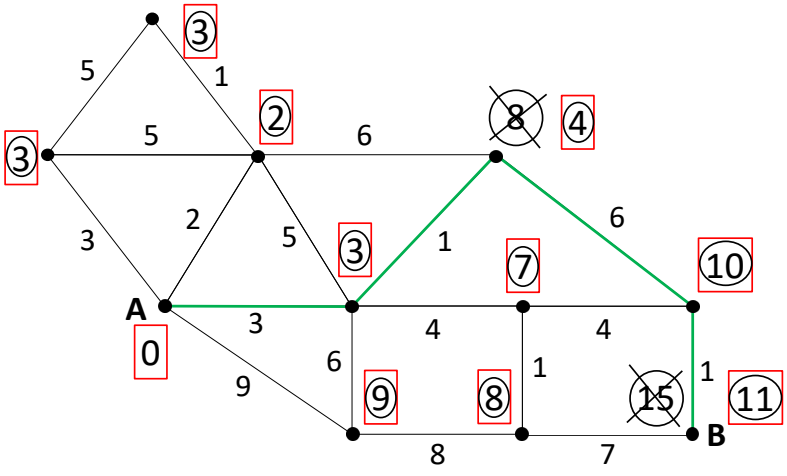
O grafo G é **conexo** pelo que é aplicável o algoritmo de Prim.

O grafo tem **11** vértices pelo que a árvore selecionada terá **10** arcos.

O valor da árvore obtida é $\mathbf{2+1+3+3+1+4+1+4+1+6=26}$.



[3,0] **6.** Considere o seguinte grafo ponderado:



Utilize o algoritmo da **Cadeia mais Curta** para construir uma cadeia $A-B$ mínima L, indicando explicitamente todas as etiquetas atribuídas.

O valor de L é $\mathbf{3+1+6+1=11}$.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Matemática Discreta

Terceiro Teste – 6 de Junho de 2017

Uma resolução com notas explicativas

1. Considere a sequência de inteiros $(5, k, 3, 3, 2, 1, 1, 1)$.

(a) Para ser sequência de graus de um grafo a sequência tem de estar por ordem não crescente logo $k \in \{5, 4, 3\}$. Como já temos 6 ímpares na sequência e, pelo Teorema do Aperto de Mãos, o número de vértices de grau ímpar é par então k tem de tomar o valor 4.

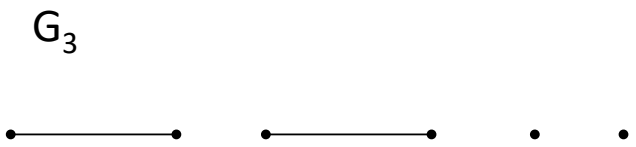
(b) Determinemos se a sequência $(5, 4, 3, 3, 2, 1, 1, 1)$ é uma sequência gráfica.

Tem-se:

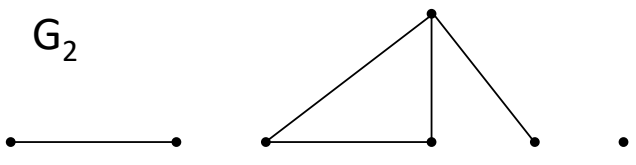
$$\begin{array}{rcr} S_1 & : & 5, \underline{4, 3, 3, 2,} \, 1, 1, 1 \\ S_1' & : & 3, 2, 2, 1, 0, 1, 1 \\ S_2 & : & 3, \underline{2, 2, 1,} \, 1, 1, 0 \\ S_2' & : & 1, 1, 0, 1, 1, 0 \\ S_3 & : & 1, 1, 1, 1, 0, 0 \end{array}$$

em que de S_i para S_i', $i \in \{1, 2\}$, se aplicou o Algoritmo das Sequências Gráficas e de S_i' para S_{i+1}, $i \in \{1, 2\}$, se ordenou a sequência por ordem não crescente.

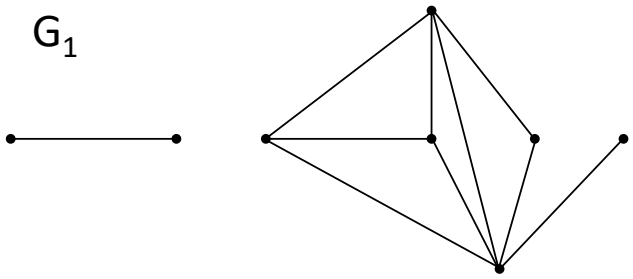
Embora possamos continuar a aplicar o Algoritmo, concluímos facilmente que S_3 é uma sequência gráfica, pois o grafo simples G_3 tem S_3 como sequência de graus.



Atendendo à primeira parte da demonstração do Algoritmo, podemos construir um grafo simples G_2 cuja sequência de graus é S_2. Teremos de acrescentar um novo vértice e torná-lo adjacente a 2 vértices de grau 1 e a outro vértice de grau 0.



Acrescentando um novo vértice a G_2 e tornando tal vértice adjacente a 5 vértices, nomeadamente ao vértice com grau 3, aos dois vértices com grau 2, a um dos vértices de grau 1 e ao vértice de grau 0, obtemos um grafo G_1 cuja sequência de graus é S_1.



2. A árvore T tem ordem 18, logo tem 18 vértices. Como toda a árvore tem, pelo menos, 2 vértices de grau 1 então temos de ter x necessariamente igual a 1.

Numa árvore com n vértices a soma dos graus dos vértices é $2n-2$, conclusão obtida a partir do Teorema do Aperto de Mãos e do facto de o número de arcos de uma árvore ser sempre igual ao número de vértices menos um.

Assim

$$\begin{aligned} 5p + (18 - p) &= 2 \cdot 18 - 2 \\ 4p + 18 &= 34 \\ 4p &= 16 \\ p &= 4. \end{aligned}$$

Logo o tamanho de T é 17, $x = 1$ e $p = 4$.

3. (a) Sendo $A(G) = [a_{ij}]$, pela definição de matriz de adjacências e pela definição de grau exterior de um vértice temos:

$$\begin{aligned} d^+(x_1) &= \sum_{j=1}^{4} a_{1j} = 0+0+0+1 = 1; \\ d^+(x_2) &= \sum_{j=1}^{4} a_{2j} = 1+0+1+1 = 3; \\ d^+(x_3) &= \sum_{j=1}^{4} a_{3j} = 0+0+0+0 = 0; \\ d^+(x_4) &= \sum_{j=1}^{4} a_{4j} = 1+0+1+0 = 2. \end{aligned}$$

Assim a sequência de graus exteriores de G é $(3, 2, 1, 0)$.

Analogamente, pela definição de matriz de adjacências e pela definição de grau interior de um vértice

temos:

$$\begin{aligned} d^-(x_1) &= \sum_{j=1}^{4} a_{j1} = 0+1+0+1 = 2, \\ d^-(x_2) &= \sum_{j=1}^{4} a_{j2} = 0+0+0+0 = 0, \\ d^-(x_3) &= \sum_{j=1}^{4} a_{j3} = 0+1+0+1 = 2 \\ \text{e} \quad d^-(x_4) &= \sum_{j=1}^{4} a_{j4} = 1+1+0+0 = 2. \end{aligned}$$

Logo a sequência de graus interiores de G é $(2,2,2,0)$.

Ora

$$\begin{aligned} d(x_1) &= d^+(x_1)+d^-(x_1) = 1+2 = 3, \\ d(x_2) &= d^+(x_2)+d^-(x_2) = 3+0 = 3, \\ d(x_3) &= d^+(x_3)+d^-(x_3) = 0+2 = 2, \\ \text{e} \quad d(x_4) &= d^+(x_4)+d^-(x_4) = 2+2 = 4 \end{aligned}$$

donde a sequência de graus de G é $(4,3,3,2)$.

(b) Como $d^+(x_2) \neq 0$ e $d^-(x_2) = 0$ então x_2 é fonte.

Visto que $d^+(x_3) = 0$ e $d^-(x_3) \neq 0$ podemos concluir que x_3 é poço.

Não há vértices isolados pois não há vértices de grau 0.

(c) Como $a_{14} = a_{21} = a_{43} = 1$ então (x_1, x_4), (x_2, x_1) e (x_4, x_3) são arcos de G.

Ora $x_1, (x_2, x_1), x_2$ é uma cadeia de comprimento 1 que liga x_1 a x_2. Logo x_1 e x_2 estão na mesma componente conexa de G. Por outro lado, $x_1, (x_1, x_4), x_4, (x_4, x_3), x_3$ é uma cadeia $x_1 - x_3$ de comprimento 2 e, portanto, podemos concluir que x_1 e x_3 estão na mesma componente conexa. Finalmente, $x_1, (x_1, x_4), x_4$ é uma cadeia $x_1 - x_4$ de comprimento 1. Logo x_1 e x_4 estão na mesma componente conexa.

Assim concluímos que os vértices x_1, x_2, x_3 e x_4 estão todos na mesma componente conexa e, portanto, G é conexo.

G não pode ser fortemente conexo pois tem uma fonte x_2 e, portanto, não existem caminhos de outros vértices de G para x_2.

(d) Já vimos, pelas alíneas (a) e (c), que G é conexo e tem apenas dois vértices de grau ímpar. Logo G é semi-euleriano não podendo, portanto, ser euleriano.

(e) O número de sucessores simultâneos aos vértices x_2 e x_4 é dado pela entrada da posição $(2,4)$ da matriz $A(G)(A(G))^\top$.

Ora

$$\begin{aligned} \left[A(G)(A(G))^\top\right]_{24} &= \sum_{j=1}^{4} (A(G))_{2j} [(A(G))^\top]_{j4} \\ &= \sum_{j=1}^{4} a_{2j} a_{4j} \\ &= a_{21}a_{41} + a_{22}a_{42} + a_{23}a_{43} + a_{24}a_{44} \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ &= 1+0+1+0 = 2, \end{aligned}$$

logo existem 2 sucessores simultâneos aos vértices x_2 e x_4.

4. Como G é uma árvore, logo um grafo conexo sem ciclos, temos de ter $d_1 = 1$ pois a sequência está por ordem não crescente e não há vértices isolados. Como se trata de uma árvore com n vértices terá $n-1$ arcos e, Pelo Teorema do Aperto de Mãos,

$$d_n + d_{n-1} + \cdots + d_3 + d_2 + d_1 = 2(n-1)$$

donde

$$d_n + d_{n-1} + \cdots + d_3 = 2n - 2 - 2,$$

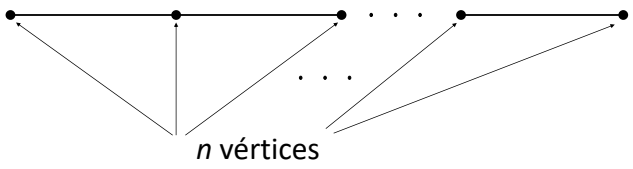
isto é,

$$d_n + d_{n-1} + \cdots + d_3 = 2n - 4 = 2(n-2).$$

Visto que a sequência está por ordem não crescente e, por hipótese, $d_3 > d_2 = 1$ temos

$$d_n \geq d_{n-1} \geq \cdots \geq d_3 \geq 2.$$

Ora não pode haver nenhum destes $n-2$ elementos $d_n, \ldots, d_3$ com valor superior a 2 pois, caso contrário, teríamos

$$d_n + d_{n-1} + \cdots + d_3 > 2(n-2).$$

Assim $d_n = d_{n-1} = \cdots = d_3 = 2$ e, como G é uma árvore, tem de ser o grafo cadeia P_n, isto é, G pode ser representado geometricamente por