



Matemática Discreta

Exame de Recurso

25 de Junho de 2013

Duração: 2h 30m

1. Determine $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$ e $\{1, 2\} \times \{\emptyset\}$. (1,5 valores)

===== Mudar de folha =====

2. Demonstre que, dados conjuntos A e B ,

$$(B \setminus A) \cup (A \setminus B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B). \quad (2 \text{ valores})$$

===== Mudar de folha =====

3. Considere R e S relações de equivalência sobre o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$,

tais que $X/R = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ e que $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz das

adjacências de S :

- (a) Indique a matriz de adjacências de R . (1,5 valores)

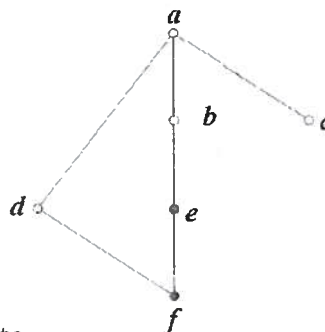
- (b) Indique X/R^{-1} . (1,5 valores)

- (c) Indique X/S . (1,5 valores)

===== Mudar de folha =====

4. Considere o conjunto $Y = \{a, b, c, d, e, f\}$

e a relação de ordem parcial $\leq$ sobre Y
definida pelo seguinte diagrama de Hasse:



Indique, se existirem, supremo, ínfimo,

conjunto dos elementos maximais e conjunto

dos elementos minimais do subconjunto $Z = \{a, b, c, d\}$ do conjunto

parcialmente ordenado $(Y, \leq)$. (2 valores)

===== Mudar de folha =====

5. Diga, justificando, se para funções reais de variável real a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa:

Se $f : A \rightarrow f(A)$ é uma função invertível então $f^2 : A \rightarrow f^2(A)$, tal que $f^2(x) = (f(x))^2$, é também invertível. (1,5 valores)

===== Mudar de folha =====

6. Considere o conjunto P das palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ cujo comprimento é par.

(a) Defina P indutivamente e escreva as respectivas regras de inferência. (2 valores)

(b) Usando as regras de inferência descritas na alínea anterior, mostre que $0110 \in P$. (1,5 valores)

===== Mudar de folha =====

7. Diga, justificando, se $(4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 2)$ é uma sequência gráfica. (1,5 valores)

===== Mudar de folha =====

8. Quantos arcos tem uma árvore com três vértices de grau 1 e os restantes de grau 3. (2 valores)

===== Mudar de folha =====

9. Seja G um grafo simples com matriz de alcançabilidade R .
Mostre que $R = (R^2)_B$. (1,5 valores)



+601/1/60+

Departamento de Matemática
Matemática Discreta

Faculdade de Ciências e Tecnologia — UNL
07/05/2014 2º Teste

DURAÇÃO DO TESTE: 50 MINUTOS

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadradinhos respectivos da grelha ao lado (■) e escreva o nome completo, o número e o curso abaixo.

Nome:

.....

Número: Curso:

Para cada questão 1-8 existe uma e apenas uma resposta certa. Marque a resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (■) com caneta azul ou preta. Cada resposta certa vale 2 valores. Cada resposta errada desconta 0,5 valores. Marcações múltiplas anulam a questão. Não se esqueça de resolver as questões 9 e 10 (respostas abertas — 2 valores cada).

Questão 1 Qualquer que seja a aplicação $f : X \rightarrow Y$ e quaisquer que sejam os subconjuntos A e B de X .

☐ a $A \cap B = f^{-1}(f(A \cap B)).$

☐ c $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B).$

☐ b $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$

☐ d $A \cap B = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(f(B)).$

Questão 2 Qualquer que seja o conjunto finito X de cardinalidade superior a 1, das aplicações de $\mathcal{P}(X)$ em X :

☐ a Todas são sobrejectivas.

☐ c Nenhuma é sobrejectiva.

☐ b Nenhuma é injectiva.

☐ d Todas são injectivas.

Questão 3 Quaisquer que sejam as aplicações $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, se $g \circ f$ é bijectiva então:

☐ a f é injectiva e g é sobrejectiva.

☐ c f é bijectiva.

☐ b g é bijectiva.

☐ d f é sobrejectiva e g é injectiva.

Questão 4 Considere todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$.

☐ a Apenas uma das aplicações é invertível.

☐ c Apenas duas aplicações são invertíveis.

☐ b Quatro das aplicações são invertíveis.

☐ d Nenhuma das aplicações é invertível.



Questão 5 Considere a aplicação $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida por $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

A aplicação $g \circ f$ é invertível se $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ é a aplicação definida por:

☐ a $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

☐ c $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ b $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ d $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Questão 6 Considere o conjunto Δ definido indutivamente pelas regras

1. $\emptyset \in \Delta$

2. $A \in \Delta \Rightarrow \{A\} \in \Delta$.

☐ a $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \dots\}$. ☐ c $\Delta = \{\emptyset\}$.

☐ b $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$. ☐ d $\Delta = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$.

Questão 7 Sendo Δ o conjunto definido na questão anterior, considere a função $\oplus : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$ definida pelas equações: $\oplus(A, \emptyset) = A$ e $\oplus(A, \{B\}) = \{\oplus(A, B)\}$.

☐ a $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{\emptyset, A\}$.

☐ c $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \emptyset$.

☐ b $\oplus(A, \{\emptyset\}) = \{A\}$.

☐ d $\oplus(A, \{\emptyset\}) = A$.

Questão 8 A indução sobre $\mathbb{N}_0$ pode ser formulada como se segue (onde P é uma propriedade):

☐ a $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ b $[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ c $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

☐ d $\forall n \in \mathbb{N}_0 (P(n+1) \Rightarrow P(n)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 P(n)$.

Questão 9

Seja $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(n+1) = 2 + f(n).$$

Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}_0 f(n) = 2n + 1$.

Questão 10

Escreva equações que definam recursivamente a função $\text{zeros} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada elemento w de $\mathbb{W}$ (i.e. a cada palavra no alfabeto $\{0, 1\}$) faz corresponder o número de vezes que 0 (zero) ocorre em w .

**DURAÇÃO DO EXAME: 2 HORAS**

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadros respectivos da grelha ao lado (■) e escreva o nome completo, o número e o curso abaixo.

Nome:

Número: Curso:

Para cada questão 1-10 existe uma e apenas uma resposta certa. Marque a resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (■) com caneta azul ou preta. Cada resposta certa vale 1,5 valores. Cada resposta errada desconta 0,5 valores. Marcações múltiplas anulam a questão.

As questões 11, 12 e 13 são de resposta aberta.

Questão 1 Qualquer que seja o conjunto finito A , tal que $|A| = n$ com $n > 2$, temos que:

- ☐ a $|A \times A| = 2n$. ☐ b $|\cap \mathcal{P}(A)| = n$. ☐ c $|A \times \emptyset| = n$. ☐ d $|\cup \mathcal{P}(A)| = n$.

Questão 2 Seja R uma relação binária sobre o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ tal que é a sua matriz de adjacências.

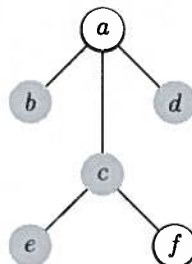
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ☐ a R é irreflexiva, anti-simétrica e transitiva.
☐ b R não é irreflexiva, é anti-simétrica e transitiva.
☐ c R não é irreflexiva, é anti-simétrica e não é transitiva.
☐ d R é irreflexiva, simétrica e transitiva.

Questão 3 Sejam R e S duas relações de equivalência sobre o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$, tais que $X/R = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ e $X/S = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$. É igualmente uma relação de equivalência sobre X a seguinte relação binária:

- ☐ a $R \circ S$. ☐ b $S \circ R$. ☐ c $R \cap S$. ☐ d $R \cup S$.

Questão 4 Dados $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ e $A = \{b, c, d, e\}$, considere a relação de ordem parcial $\leq$ sobre X definida pelo seguinte diagrama de Hasse:



- ☐ a e é minorante de A .
☐ b b é elemento minimal de A .
☐ c f é minorante de A .
☐ d a é elemento maximal de A .



Questão 5 Dados conjuntos X e Y , $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação se, e só se,

- ☐ a $\exists y \in Y \forall x \in X \quad f(x) = y.$ ☐ c $\exists^1 y \in Y \forall x \in X \quad f(x) = y.$
☐ b $\forall x \in X \exists^1 y \in Y \quad f(x) = y.$ ☐ d $\forall x \in X \exists y \in Y \quad f(x) = y.$

Questão 6 Quaisquer que sejam as aplicações $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ e $h : Z \rightarrow W$, se $g \circ f$ é sobrejectiva e $h \circ g$ é injectiva então

- ☐ a f é invertível. ☐ c Nenhuma das restantes alíneas.
☐ b g é invertível. ☐ d h é invertível.

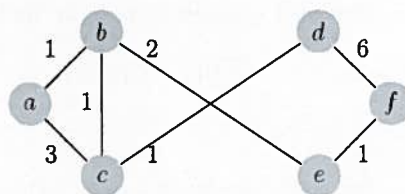
Questão 7 A seguinte sequência é uma sequência gráfica

- ☐ a (7,5,4,3,2,1,0). ☐ c (5,5,4,3,2,1,0).
☐ b (5,4,3,2,1,1,1). ☐ d (5,4,3,3,1,1,1).

Questão 8 Seja G uma floresta, com n vértices e duas componentes conexas. A soma dos graus dos n vértices de G é:

- ☐ a $2n-1.$ ☐ b $2n-3.$ ☐ c $2n-4.$ ☐ d $2n-2.$

Questão 9 Considere o grafo ponderado:



Aplique o algoritmo da cadeia mais curta para determinar uma cadeia $f - a$. Num dado momento

- ☐ a d tem etiqueta definitiva com valor 6.
☐ b b e c têm etiquetas provisórias com valores 3 e 4, respectivamente.
☐ c a e c têm etiquetas provisórias com valor 4.
☐ d a tem etiqueta provisória com valor 7.

Questão 10 Considere G um grafo simples marcado nos vértices. Seja $A =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ a}$$

respectiva matriz de adjacências.

- ☐ a G é semi-euleriano. ☐ c G é uma árvore.
☐ b G é euleriano. ☐ d Nenhuma das restantes alíneas.

Atenção: o exame continua na folha seguinte.



Questão 11

Seja W_1 o conjunto de todas as palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{1\}$. Defina indutivamente o conjunto W_1 e indique equações que definam recursivamente a função $par : W_1 \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que

$$par(x) = \begin{cases} 1 & \text{se comprimento de } x \text{ é par} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

[1,5 valores]

Questão 12 Demonstre, por indução, que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^n \leq (n+1)!$.

[1,5 valores]

Questão 13

Seja $G = (X, U)$ um grafo simples conexo, com n vértices, $n \geq 2$. Mostre que $R = (A^n)_B \vee (A^{n+1})_B$, onde A denota a matriz de adjacências e R a matriz de alcançabilidade do grafo G para alguma marcação dos seus vértices.

[2 valores]

